МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НАДЕЖНОСТИ

М.С. Скворцов

Специализированная инжиниринговая компания Севзапмонтажавтоматика
(ОАО “СПИК СЗМА”), Санкт-Петербург, пер. Каховского, д.10
mikhail_skvortsov@szma.com, info@szma.com

Аннотация. Предложена методика моделирования и расчета надежности систем с сетевой структурой. На основе предложенной методики и алгоритма логико-вероятностной оптимизации надежности получены решения задач оптимизации надежности для сетевых структур. Проведено сравнение полученных решений с решениями, полученными в других работах.

Ключевые слова: оптимизация надежности, сетевая структура, общий логико-вероятностный метод, схема функциональной целостности.

1. Введение. Многие практические задачи оптимизации надежности, связанные с информационными сетями, трубопроводными системами, энергетическими системами, могут быть представлены в виде сетевой модели. В контексте данной работы под сетью понимается структурный объект, свойства которого представляются в виде сетевой схемы функциональной целостности.

Моделью для информационных сетей, содержащих ненадежные элементы, обычно является ненаправленный граф $G(E,V)$, с набором узлов V и набором ребер E [4]. Ребра могут находиться только в двух состояниях: работоспособности или отказа, с заданными вероятностями p_{ij} и $1-p_{ij}$, соответственно. Под вероятностью p_{ij} будем понимать вероятность того, что ребро (i, j) находится в работоспособном состоянии в случайный момент времени. Типовые допущения для данной модели:

– отказы ребер являются независимыми;
– узлы являются абсолютно надежными;
– восстановление отказавших ребер отсутствует.

В данной работе в качестве модели сетевых структур используется схема функциональной целостности (СФЦ). Для построения логических функций работоспособности системы и вероятностных функций использовался программный комплекс АРБИТР [2].

2. Методика расчета надежности систем с сетевой структурой. Условием работоспособности сети будем считать возможность передачи информации от любого узла к любому другому узлу. Количественной оценкой такой возможности является всетерминальная мера надежности R_v – вероятность того, что все узлы сети связаны друг с другом [6,8]. В других случаях интересуются коммуникацией только между двумя конкретными узлами сети – так называемыми источником (source) и приемником (terminal). Количественная оценка для данного случая – двухтерминальная надежность $R_{S,T}$, которая есть вероятность того, что существует как минимум один работоспособный путь передачи информации от узла s к узлу t [6,8].

Практические задачи оптимизации надежности, связанные с использованием этих моделей, возникают в электрических сетях, транспортных системах, при анализе архитектур отказоустойчивых компьютеров, анализе коммуникационных систем.

При анализе надежности систем с сетевой структурой, помимо трудностей, присущих всем структурно-сложным системам, появляется дополнительное затруднение. Оно связано с тем, что структура таких систем содержит кольцевые фрагменты, для корректного раскрытия которых в схему функциональной целостности [1] этой структуры должны быть внесены специальные изменения. Например, исходная схема простейшей кольцевой сети и соответствующая ей СФЦ изображена на рис.1.

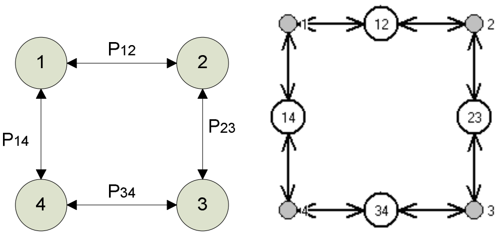

Рис. 1. Простейшая кольцевая структура сети и соответствующая ей СФЦ

Здесь узлы сети считаются абсолютно надежными и представлены на исходной схеме сети вершинами 1, 2, 3 и 4 (см. рис.1.а). В СФЦ этой сети указанные узлы представлены фиктивными вершинами 1, 2, 3 и 4. Дуги сети характеризуются случайными событиями их безотказной работы и представлены в СФЦ на рис.1 функциональными вершинами 12, 14, 23 и 34.

Как было сказано выше, условием функционирования сети является наличие хотя бы одного работоспособного пути, связывающего между собой все узлы сети, тогда логический критерий ее успешного функционирования можно записать в виде:

$$Y_S = y1 \vee y2 \vee y3 \vee y4 \tag{1}$$

Система логических уравнений для СФЦ сети:

$$\begin{cases} y1 = x1 \wedge (y12 \vee y14) = y12 \vee y14 \\ y2 = x2 \wedge (y12 \vee y23) = y12 \vee y23 \\ y3 = x3 \wedge (y34 \vee y23) = y34 \vee y23 \\ y4 = x4 \wedge (y14 \vee y34) = y14 \vee y34 \end{cases} \tag{2}$$

Данная система логических уравнений является неразрешимой из-за того, что СФЦ сети является полностью циклической. Введение дополнительной фиктивной вершины (дополнительного логического условия) в СФЦ позволяет получить систему уравнений, которая может быть разрешена, и получить логическую функцию работоспособности сети. Система логических уравнений после добавления фиктивной вершины (см. рис.2 вариант 1), запишется следующим образом:

$$\begin{cases} y1 = true \\ y2 = x12 \wedge (x14 \vee x34 \vee x23) \\ y3 = (x12 \vee x23) \wedge (x14 \vee x34) \\ y4 = (x12 \vee x34 \vee x23) \wedge x14 \end{cases} \tag{3}$$

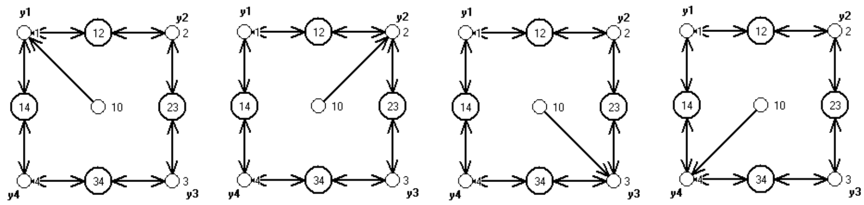

Рис. 2. Добавление дополнительного логического условия (4 варианта)

Объединяя результаты в $Y_S = y1 \vee y2 \vee y3 \vee y4$ и минимизируя полученную логическую функцию, находим искомую логическую функцию работоспособности системы для данной сетевой системы, которая совпадает с совокупностью всех минимальных остовных деревьев для данного графа:

$$Y_S = (x12 \vee x23 \vee x34) \wedge (x12 \vee x14 \vee x34) \wedge (x14 \vee x12 \vee x23) \wedge (x14 \vee x34 \vee x23) \tag{4}$$

На рис.2 изображены все возможные варианты добавления в СФЦ дополнительного логического условия, позволяющего получить логическую функцию работоспособности системы. Все четыре варианта, отображенные на рис.2, являются эквивалентными и приводят к одинаковому результату.

Описанный выше способ модификации СФЦ сетевых структур позволяет получать логическую функцию работоспособности, а затем и многочлен вероятностной функции одним из известных методов [1,7].

3. Задача оптимизации надежности систем с сетевой структурой. Математическая формулировка задачи оптимизации надежности системы при ограничении на ее стоимость в общем виде:

$$\begin{gathered} P_S(X) \to \max_{X \in D};\ D \subseteq A; \\ D = \{X \in A / C(X) \le C_0\} \end{gathered} \tag{5}$$

Для решения этой оптимизационной задачи применялся логико-вероятностный алгоритм оптимизации надежности, детально описанный в [3]. Алгоритм использует первые частные производные для выбора направления для оптимизации на каждом шаге, в предположении того, что для данной задачи локально оптимальный выбор на каждом шаге приводит к оптимальному решению. Поэтому данный алгоритм оптимизации может быть отнесен к классу «жадных». К дополнительным особенностям данного алгоритма оптимизации относится возможность нарушения ограничений в процессе поиска (выход за границы области допустимых решений во время поиска). Алгоритм реализован в виде отдельного программного модуля и встроен в программный комплекс АРБИТР.

Пример 1. Рассматривается структура сети, состоящая из четырех абсолютно надежных узлов (11, 12, 13, 14) и шести коммуникационных каналов (1, 2, 3, 4, 5, 6). Данная задача взята из [5]. Требуется найти такую конфигурацию структуры и элементный состав, чтобы максимизировать надежность передачи информации по сети при ограничении на ее стоимость $-C_S = 15$.

$$\begin{gathered} P_S(X) \to \max_{X \in D};\ D \subseteq A; \\ D = \left\{X \in A / \sum_{i=1}^{N} C(x_i) \le 15\right\}, \quad C_i = \alpha_i \exp\left[\frac{\beta_i}{1 - R(j)}\right] \end{gathered} \tag{6}$$

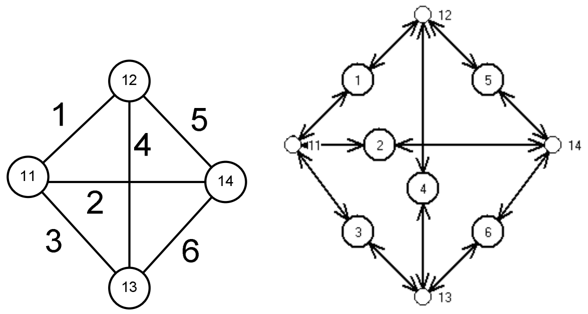

Рис. 3. Пример сетевой структуры и соответствующая ей СФЦ

Таблица 1. **Исходные данные для примера №1**

j	1	2	3	4	5	6
α_j	4,4	0,65	0,45	1,4	2,4	2,5
β_j	0,002	0,25	0,016	0,12	0,02	0,03
$p(j)$; $C(j)$	0.88; 4.444 0.92; 4.474 0.8; 4,511 0.99; 5.374	0.7; 1.496 0.75; 1.767 0.8; 2.269 0.85; 3,441	0.9;0.528 0,95;0.620 0.99;2,229 -	0.8; 2.551 0.85; 3.116 0.9; 4.648 -	0.95; 3.580 0.98; 6.524 - -	0,85; 3,054 0,9; 3,375 0,92; 3,637 0,95; 4,555

Критерием работоспособности данной сетевой структуры считается наличие связи (возможность передачи информации) между всеми узлами сети. Тогда, логический критерий успешного функционирования запишется в следующем виде $Y_S = y11 \vee y12 \vee y13 \vee y14$.

Для того чтобы система логических уравнений, представленная СФЦ на рис.3, стала разрешимой, необходимо (перед построением логической функции работоспособности системы) модифицировать СФЦ сетевой структуры, как было описано выше. Полученная логическая функция работоспособности системы рассматриваемой сетевой структуры:

$$
\begin{aligned}
Y_S = {} & (x1 \wedge x2 \wedge x3) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x3 \wedge x6) \vee (x3 \wedge x5 \wedge x6) \vee \\
& \vee (x1 \wedge x2 \wedge x5) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x5) \vee (x1 \wedge x5 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x5 \wedge x6) \vee \\
& \vee (x1 \wedge x2 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x4 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x3 \wedge x4) \vee \\
& \vee (x2 \wedge x4 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x4 \wedge x5) \vee (x3 \wedge x4 \wedge x5) \vee (x4 \wedge x5 \wedge x6)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Расчетный многочлен вероятностной функции состоит из 16 одночленов:

$$
\begin{aligned}
P(Y) = {} & P1P2P3 + P1Q2P3P6 + Q1P2P3P6 + Q1Q2P3P5P6 + \\
& + P1P2Q3Q5 + P1Q2P3P5Q6 + P1Q2Q3P5P6 + Q1P2Q3P5P6 + \\
& + P1P2P4Q3Q5 + P1Q2P3P4Q5Q6 - P1Q2Q3P4Q5P6 - \\
& - Q1P2P3P4Q6 - Q1P2Q3P4Q5P6 - Q1P2Q3P4P5Q6 - \\
& - Q1Q2P3P4P5Q6 - Q1Q2Q3P4P5P6
\end{aligned} \tag{8}
$$

С использованием логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности получено оптимальное решение рассматриваемой задачи, совпавшее с решением, приведенным в [5] по составу и стоимости системы: состав системы (4, 2, 2, 0, 1, 3); стоимость системы 14,98; надежность системы 0,9946025.

Несколько различаются оценки надежности этого оптимального варианта построения сетевой системы. К сожалению, авторы статьи [5] не приводят аналитическое выражение для расчета вероятности безотказной работы, поэтому окончательных выводов сделать нельзя. В остальном, совпадение результатов подтверждает работоспособность разработанной методики моделирования и расчета надежности сетевых структур и логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности [3].

Пример 2. В данном примере (см. рис.4) рассматривается сеть, состоящая из пяти абсолютно надежных узлов (8,9,10,11,12) и семи коммуникационных каналов (1,2,3,4,5,6,7). Данная задача взята из работы [5]. Требуется найти конфигурацию сети и ее элементный состав, чтобы надежность передачи информации из любого узла в любой другой узел была бы максимальной при ограничении на стоимость $C_S = 15$.

$$
\begin{gathered}
P_S(X) \to \max_{X \in D}; \;\; D \subseteq A; \\
D = \left\{ X \in A / \sum_{i=1}^{N} C(x_i) \le 15 \right\}
\end{gathered} \tag{9}
$$

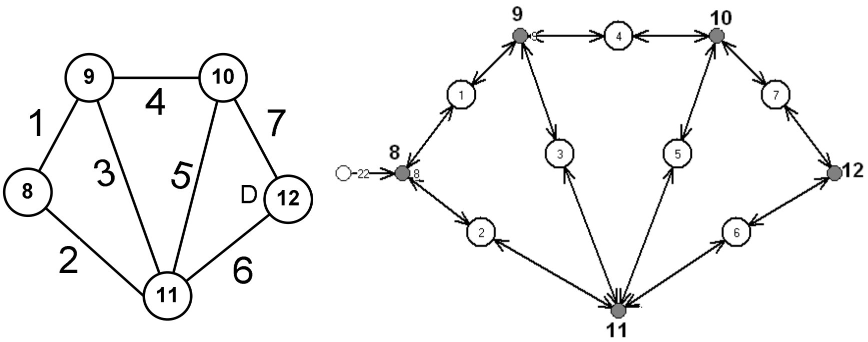

Рис. 4. Пример сетевой структуры и соответствующая ей модифицированная СФЦ

Таблица 2. **Исходные данные№1 для примера №2**

j	1	2	3	4	5	6	7
λ_j (10^{-4}) [1/час]	2.1	1.2	7.1	2.1	2.1	1.2	7.1
μ_j (10^{-3}) [1/час]	1.0	2.5	3.4	4.5	3.7	4.0	5.0
c_j	5.0	3.0	2.0	4.0	6.0	4.0	2.0
T	8760 час.						

Критерием работоспособности данной сетевой структуры является возможность обмена информацией между любыми двумя узлами сети. Тогда, логический критерий запишется в следующем виде $Y_S = y8 \wedge y9 \wedge y10 \wedge y11 \wedge y12$.

Логическая функция работоспособности системы содержит 21 кратчайший путь успешного функционирования:

$$\begin{aligned}
&Y_S = (x1 \wedge x6 \wedge x2 \wedge x4) \vee (x6 \wedge x2 \wedge x3 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x2 \wedge x5) \vee \\
&\vee (x6 \wedge x2 \wedge x3 \wedge x5) \vee (x6 \wedge x2 \wedge x5 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x2 \wedge x7) \vee \\
&\vee (x6 \wedge x2 \wedge x3 \wedge x7) \vee (x6 \wedge x2 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x3 \wedge x4) \vee \\
&\vee (x1 \wedge x6 \wedge x3 \wedge x5) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x3 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x5 \wedge x4) \vee \\
&\vee (x1 \wedge x2 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x5 \wedge x4 \wedge x7) \vee \\
&\vee (x1 \wedge x6 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x2 \wedge x3 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x2 \wedge x5 \wedge x7) \vee \\
&\vee (x2 \wedge x3 \wedge x5 \wedge x7) \vee (x2 \wedge x5 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x5 \wedge x7)
\end{aligned} \tag{10}$$

Соответствующий вероятностный многочлен состоит из 21 одночлена:

$$\begin{aligned}
&P(Y) = P1P2P4P6 + Q1P2P3P4P6 + P1P2P4P5P6 + \\
&+ Q1P2P3Q4P5P6 + Q1P2Q3P4P5P6 + P1P2Q4Q5P6P7 + \\
&+ Q1P2P3Q4Q5P6P7 + Q1P2Q3P4Q5P6P7 + P1Q2P3P4P6 + \\
&+ P1Q2P3P4P5P6 + P1Q2P3Q4Q5P6P7 + P1Q2Q3P4P5P6 + \\
&+ P1P2P4Q6P7 + P1Q2P3P4Q6P7 + P1Q2Q3P4P5Q6P7 + \\
&+ P1Q2Q3P4Q5P6P7 + Q1P2P3P4Q6P7 + P1P2P4P5Q6P7 + \\
&+ Q1P2P3Q4P5Q6P7 + Q1P2Q3P4P5Q6P7 + P1Q2P3Q4P5Q6P7
\end{aligned} \tag{11}$$

С использованием логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности получено решение оптимизационной задачи, полностью совпавшее с решением, приведенным в [5]: состав системы (0,1,1,1,0,1,1); стоимость системы 15; надежность системы 0,93420.

Увеличим размерность задачи следующим образом. Пусть для каждого из семи коммуникационных каналов может быть использован один из семи типов оборудования. Количество возможных вариантов построения системы $8.2 \cdot 10^6$. Таблица исходных данных приведена ниже.

Таблица 3. **Исходные данные№2 для примера №2**

i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0.7	0.75	0.8	0.85	0.88	0.9	0.92
c_i	1	2	3	5	8	13	21

Решение, полученное с помощью логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности систем сетевой структуры: оптимальный состав системы (6,7,5,5,5,7,7); стоимость системы – 100; надежность – 0,98094.

Рассмотренные задачи показывают возможность применения разработанной методики и алгоритма для решения задач оптимизации надежности технических систем сетевой структуры.

Пример 3. В данном примере (см. рис.5) рассматривается сеть, состоящая из 11 абсолютно надежных узлов (1-10,100) и 20 коммуникационных каналов ($p_i = 0.9$, c_i указана на соответствующем ребре).

Требуется найти конфигурацию сети и ее элементный состав, чтобы надежность передачи информации из любого узла в любой другой узел была бы не ниже $P_S \geq 0.9$ при минимально возможной стоимости C_S.

$$\begin{gathered}
C_S(X) \to \min_{X \in D};\ D \subseteq A; \\
D = \{X \in A / P(X) \geq 0.9\}
\end{gathered} \tag{12}$$

Логический критерий функционирования сети:

$Y_S = y1 \wedge y2 \wedge y3 \wedge y4 \wedge y5 \wedge y6 \wedge y7 \wedge y8 \wedge y9 \wedge y10 \wedge y100$.

Логическая функция работоспособности системы содержит 30976 кратчайших путей успешного функционирования. Вероятность безотказной работы варианта построения сети, отображенного на рисунке 4: $P_S = 0.993995$, $C_S = 605$. Время моделирования и расчета на ПК АРБИТР [2] составило 9 минут и 14 секунд.

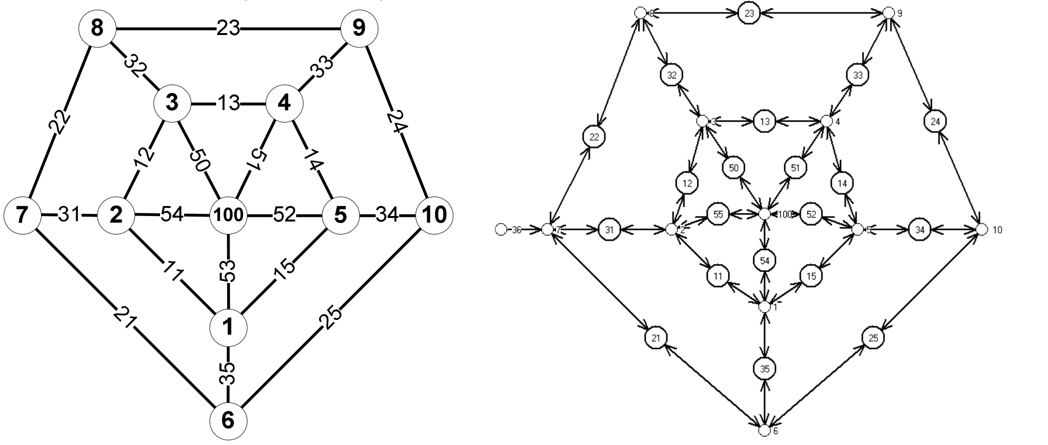

Рис. 5. Структурно-сложная сетевая структура и ее модифицированная СФЦ

Решение, полученное с помощью логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности систем сетевой структуры: оптимальный состав системы (11,12,13,14,15,21,22,23,24,25,31,33,50,51); стоимость системы – 345; надежность – 0,901961.

4. Заключение. Многие практические задачи оптимизации надежности, связанные с информационными сетями, трубопроводными системами, энергетическими системами, могут быть представлены в виде сетевой модели. В статье предложена методика построения математической модели сетевых структур для моделирования, анализа и оптимизации надежности. Показана возможность использования логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности для систем сетевой структуры. Рассмотрены примеры задач оптимизации надежности сетевых систем. Решения, полученные с помощью данной методики, подтверждены сравнением с решениями, полученными другими авторами.

Литература

1. *Можаев А.С.* Общий логико-вероятностный метод анализа надежности структурно-сложных систем. Уч. пос. Л.:ВМА, 1988. 68с.
2. *Можаев А.С.* Программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и расчета надежности и безопасности систем АРБИТР. // Свидетельство об официальной регистрации № 2003611101. М.: РОСПАТЕНТ РФ, 2003. 1с.
3. *Скворцов М.С.* Решение задачи оптимизации надежности с помощью метода логико-вероятностных вкладов. // Надежность, № 2(30), 2009, С. 15–29
4. *Konak A., Smith A.E.* Network reliability optimization. // *Resende M.G., Pardalos P.M. (eds)* Handbook of optimization in telecommunications. NY: Springer Science and Business Media, 2006. P. 733–760.
5. *Misra K.B., Sharma U.,* An efficient algorithm to solve integer programming problems arising in system reliability design. //IEEE Trans. Reliability, Vol. 40, No. 1, 1991. P. 81–91.
6. *Rubino G.* Network reliability evaluation. // State-of-the art in performance modeling and simulation. NY: Gordon and Breach Books, 1998. P. 275–302
7. *Sahinoglu M., Rice B.* Network reliability evaluation // WIREs Comp Stat, Vol.2, 2010. P. 189–211
8. *Shooman M.* Reliability of computer systems and networks. Fault tolerance, analysis and design. NY: John Wiley & Sons, 2002. 528 p.