

А.А. МУСАЕВ  
**МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ  
РОБАСТИФИЦИРОВАННЫХ СИСТЕМ  
АНАЛИЗА ТОРГОВЫХ СИТУАЦИЙ**

---

*Мусаев А.А.* **Методы построения робастифицированных систем анализа торговых ситуаций.**

**Аннотация.** Рассмотрена задача построения систем анализа динамики котировок индексов фондовых бирж, обладающих повышенной устойчивостью к вариациям их вероятностных характеристик. Качество восстановления системной составляющей наблюдаемых процессов определяется на основе терминальных торговых показателей и непосредственно связано с параметрами используемой торговой стратегии. В основу алгоритмов устойчивого формирования системной составляющей положена технология робастного оценивания.

**Ключевые слова:** робастное оценивание, метод наименьших квадратов, управление торговыми операциями, торговая стратегия.

*Musaev A.A.* **Method of Trade Situations Robust Analysis Systems Construction.**

**Abstract.** The problem of the stock exchanges indexes dynamics analysis systems construction, possessing higher stability to their probability characteristics variations, is considered. Quality of a current process system component restoration is defined on the basis of terminal trading indicators and immediately connected with used trading strategy parameters. The robust estimation math technology is put in a basis of system dynamics component steady formation algorithms.

**Keywords:** robust estimation, a least squares method, management of trading operations, trading strategy.

---

**1. Введение.** Повышение статистической устойчивости комплекса алгоритмического обеспечения управления торговыми, инвестиционными и финансовыми операциями является частным случаем общей проблемы повышения устойчивости функционирования динамических систем в условиях неопределенности. При этом под статистической устойчивостью алгоритма обработки будем понимать способность оценок, формируемых на основе этого алгоритма, сохранять свои точностные характеристики при наличии отклонений вероятностных характеристик исходных данных относительно параметров априорно принятой математической модели. В современной математической литературе [3, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 17 и др.] методы обработки, алгоритмы и оценки, удовлетворяющие требованию статистической устойчивости, принято называть *робастными*.

Общее качественное определение робастности требует введения той или иной метрики, характеризующей количественную меру вари-

ации оценки. При этом робастность выступает как непрерывность характеристик качества в окрестности параметров, определяющих исходные предположения [17, 19]. Другой подход связан с получением теорем ослабленного типа, характеризующих определенный результат в достаточно широком диапазоне начальных условий [1, 15, 16].

Общая теория статистического вывода в экономическом анализе и соответствующие ей подразделы теории наблюдения динамических систем исторически складывались в рамках параметрических моделей. При этом распределение генеральной совокупности предполагалось известным с точностью до нескольких параметров, относительно которых требовалось сделать те или иные статистические выводы. В частности, в практике оценки эволюции состояния инвестиционной среды или объекта экономического анализа наибольшее распространение нашла нормальная модель, позволяющая построить достаточно полную и глубокую теорию статистического синтеза систем наблюдения. Однако ее адекватность реальной статистической динамике рынков капитала, как правило, оказалась несостоятельной. При этом использование традиционных схем обработки, ориентированных на данную модель, неизбежно ведет к существенному снижению качества анализа и прогноза развития ситуации [3, 6, 7, 9, 11].

В связи с этим возникла необходимость в построении статистических методов анализа рынков, обладающих пониженной чувствительностью к возможным вариациям вероятностных характеристик исходных данных. Один из возможных путей в этих условиях дает непараметрическая статистика, в которой априори предполагается, что функциональный вид участвующих в задаче распределений неизвестен [4, 12]. Более эффективный подход, позволяющий сохранить весь объем имеющейся достоверной информации, состоит в переходе к построению приближенно-параметрических моделей с учетом, как правило, непараметрического «засорения». Указанный подход выделен в [17] в особую область *робастной статистики* третьего поколения, которая стоит после параметрической и непараметрической статистик.

**2. Элементы теории робастного оценивания.** Рассмотрим задачу построения робастных методов последовательного оценивания эволюции торговой ситуации (на примере состояния рынков капитала) по измерениям, полученным в условиях априорной неопределенности относительно вероятностной структуры исходных данных.

В качестве базовой модели рассмотрим традиционную линейную схему наблюдений  $z = Ax + \xi$ , где  $z = (z_1, \dots, z_n)$  — вектор наблюдений за состоянием системы, описываемой вектором  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ;  $\xi$  — вектор случайных аддитивных погрешностей.

Из теоремы Гаусса—Маркова [5] следует, что любые оптимальные альтернативные оценки не могут быть линейными функциями наблюдений. Соответствующие процедуры почти всегда приводят к весьма сложным вычислительным схемам, а их свойства для выборок конечного объема, как правило, поддаются лишь эмпирическому исследованию методами Монте-Карло. Основной подход к получению робастных оценок параметров линейной модели состоит в построении некоторого аналога оценки параметра положения для модели прямых наблюдений и в доказательстве асимптотической эффективности предлагаемой процедуры. Сложность состоит в том, чтобы из множества возможных аналогов выбрать асимптотически эффективный. Точная теория таких оценок для выборок конечного объема в настоящее время еще не построена; их исследование проводится методами математического моделирования, посредством которого решается вопрос о возможности практического применения предлагаемой процедуры.

Заметим, что большинство получающихся на этом пути оценок предполагает наличие некоторого начального, хотя бы весьма грубого, приближения. Это создает возможность рекуррентного использования предлагаемых процедур. Сходимость таких рекуррентных процессов исследовать удается далеко не всегда.

Наиболее простое и непосредственное обобщение допускают оценки *наименьшего контраста*, или *M-оценки*. Вместо минимизации выражения

$$\sum_{i=1}^n \left\{ z_i - \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \right\}^2,$$

как это делается в *методе наименьших квадратов* (МНК), ищутся значения  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)^T$ , на которых достигается минимум значения функционала

$$\gamma_p(z) = \sum_{i=1}^n \rho \left( z_i - \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \right)$$

при соответствующем выборе функции  $\rho$ , которая обычно является выпуклой. Например известно, что в случае оценивания параметра

положения хорошими свойствами обладает оценка Хьюбера [17], основанная на функции

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & |t| < c \\ c|t| - \frac{c^2}{2}, & |t| \geq c \end{cases}.$$

По крайней мере, асимптотическая оптимальность соответствующей оценки сохраняется и при переходе к оцениванию параметров линейной модели.

Другой способ получения робастных оценок состоит в том, что система нормальных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \left( z_i - \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \right) A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (1)$$

к которой приводит МНК, интерпретируется как равенство нулю эмпирических смещений моментов векторов

$$\left( z - \sum_j A_{\bullet j} x_j \right) \text{ и } A_{\bullet j}.$$

После этого система (1) заменяется системой уравнений, в левых частях которых стоят какие-либо робастные аналоги выборочных моментов.

Известно, что оценки минимального контраста обладают свойствами асимптотической состоятельности и нормальности при выполнении ряда традиционных требований к регулярности функции  $\rho(t)$  [17].

Рассмотрим в качестве примера подход, основанный на построении асимптотически минимаксных  $M$ -оценок [17, 9, 10]. Пусть  $\{F\}$  — выпуклый класс непрерывных симметричных распределений, в котором совокупность распределений с конечной фишеровской информацией  $I(f)$  образует всюду плотное подмножество  $f^*$ , на котором достигается минимум фишеровской информации

$$I(f^*) = \min I(f), \quad f \in \{F\},$$

причем  $f^*(t) = -\ln f^*(t)$  выпукла и удовлетворяет условию Липшица.

Пусть для этих  $\rho^*$  и  $f^*$  выполнены общие условия регулярности. Тогда соответствующая оценка  $\hat{x}_n$  удовлетворяет условию минимаксной робастности, т.е. для всех  $f \in \{F\}$

$$D_M(\rho^*, f) \leq D_M(\rho^*, f^*) = (A^T A)^{-1} I(f^*) \leq D_M(\rho, f^*).$$

В случае, когда известно «наименее благоприятное» распределение  $f^*$  из данного класса  $\{F\}$  и соответствующие функции

$$\rho^*(t) \text{ и } \psi^*(t) = [\rho^*(t)]',$$

для построения устойчивых оценок можно применять специфические варианты метода стохастической аппроксимации, представленные в работах [3, 6–10]. Заметим, что во многих случаях существенно, чтобы полученные оценки были инвариантны относительно выбора единицы измерений. Это достигается путем введения в оценки масштабного множителя  $\sigma$  :

$$\hat{x} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^n p[(z_i - \hat{x}) / \sigma].$$

В качестве  $\sigma$  можно использовать любой известный параметр масштаба выборочного распределения  $F$ . Если никакой априорной информации о параметре масштаба не имеется, в качестве  $\sigma$  можно использовать какую-либо его устойчивую оценку. Чаще всего для этой цели используют медианное отклонение

$$\hat{s}_m = \operatorname{cmcd} \{ |z_i - \operatorname{med} \{z_i\}| \}.$$

В случае нормального распределения  $N(0, \sigma^2)$  оценка с поправочным множителем  $c = 1,48$  является несмещенной оценкой среднеквадратического отклонения  $\sigma$ . При этом эффективность  $\hat{s}_m$  по отношению к выборочной дисперсии составляет приблизительно 40 %, но в отличие от него  $\hat{s}_m$  выдерживает без существенного снижения точности до 50 % аномальных измерений. Поправочные множители в выражении  $\hat{s}_m$  для некоторых других распределений приведены в [2].

Другой подход к построению оценок параметра положения, инвариантных относительно выбора масштаба измерений, требует одновременного нахождения оценок  $x$  и  $\sigma$  в схеме  $z_i \in F[(z - x) / \sigma]$ ,  $i = 1, \dots, n$  из системы уравнений

$$\chi(t) = \psi^2(t) - \beta, \quad \beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(t) d\psi(t).$$

Общая теория таких оценок, известных как *ММ*-оценки, построена в [18].

В большинстве практически значимых задач, связанных с оценкой экономической ситуации, в частности, инвестиционных задач, удастся задать непараметрическое множество распределений погрешностей измерений, которое с фиксированным уровнем доверия содержит все вариации распределений наблюдений. При этом уровень априорной неопределенности будет характеризоваться размерами выбранного класса — чем меньше известно о возможном распределении, тем шире оказывается класс, который его содержит с заданной достоверностью. В предельном случае, когда невозможно сформировать никакие достаточно достоверных гипотез о структуре распределений, используются наиболее широкие классы, например, класс всех невырожденных распределений.

Подобный подход упрощает процедуру построения *М*-оценок и сводит задачу выбора наименее благоприятного распределения к решению вариационной задачи минимизации фишеровской информации  $I(f)$  на выбранном классе распределений. При этом размытая категория «наименее благоприятного распределения» должна быть приведена к строго формализованной форме на основе некоторой внешней метрики «благоприятности».

Рассмотрим некоторые выпуклые классы функций распределения [3, 9, 10].

1. Пусть  $K_L$  — класс невырожденных распределений, задаваемый единственным ограничением  $f(0) \geq \text{const} = (2a)^{-1} > 0$ . Положив  $\psi(z) = \text{sign}(z)$ , получим  $I(f) \geq 4f^2(0)$ . Нижняя граница достигается на распределении, для которого  $f'/f = \text{const}$ , что соответствует распределению Лапласа с плотностью

$$f(z) = (2a)^{-1} \exp(-|z|/a);$$

константа  $a$  определена из условия  $f(0) = (2a)^{-1}$ .

Метод максимального правдоподобия сводится в этом случае к методу наименьших модулей  $\sum_{i=1}^n |z_i - x| = \min$ . Соответствующая оцен-

ка максимального правдоподобия неизвестного центра  $\theta$  — выборочная медиана.

2.  $K_G$  — класс распределений с ограниченной дисперсией:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz \geq \text{const} = a^2 .$$

Положив  $\phi(z) = z$ , получим выражение для фишеровского информанта в виде

$$I(f) \geq \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz \right]^{-1} ,$$

причем равенство достигается при  $f' / f = \text{const}$ , что отвечает нормальному распределению  $N(0, a^2)$ . Константа определяется из условия  $\int z^2 f dz = a^2$ . Соответствующая этому классу процедура — метод наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^n (z_i - x)^2 = \min .$$

Минимаксной оценкой искомого параметра  $x$  в классе  $K_G$  является выборочное среднее  $\bar{z}$ .

3. Пусть класс  $K_U$  состоит из плотностей вида

$$f(z) = (1 - \varepsilon) f_0(z) + \varepsilon h(z), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (2)$$

где  $f_0(z)$  — некоторая известная плотность, а  $h(z)$  — неизвестная плотность с единственным ограничением  $f(z) \in F$ .

Задача построения наименее благоприятного распределения сводится к минимизации функционала  $I(f)$  при ограничениях

$$F(z) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1; \quad f(z) \geq (1 - \varepsilon) f_0(z). \quad (3)$$

Из вариационного исчисления известно, что экстремали такой задачи состоят из отрезков границы  $(1 - \varepsilon) f_0(z)$  и отрезков экстремалей той же задачи, но без ограничения (3). При этом имеется общее соотношение, позволяющее находить точки «переключения» с одного отрезка на другой. В то же время решение задачи без ограничений (3) известно — это плоскость Лапласа. Из этих соображений получается

общий вид наименее благоприятного распределения в классе (2): если  $f_0$  на хвостах убывает быстрее, чем  $\exp(-\alpha|z|)$ , то

$$f^*(z) = \begin{cases} (1-\varepsilon)f_0(z), & |z| \leq k; \\ c \cdot \exp(-\alpha|z|), & |z| > k. \end{cases} \quad (4)$$

В случае, когда в качестве  $f_0(z)$  рассматриваются распределения с более тяжелыми хвостами, чем экспоненциальные, то может получиться наоборот, когда  $(1-\varepsilon)f_0(z)$  проявляются на хвостах распределения, а отрезок плотности Лапласа — в центральной части. В частности, если взять в качестве  $f_0(z)$  плотность нормального  $N(0, \sigma^2)$  распределения, то решение имеет вид (4), где

$$\alpha = k / \sigma^2, \quad c = (1-\varepsilon) / \left( \alpha \sqrt{2I} \right) \exp\left( \frac{k^2}{2\sigma^2} \right),$$

а  $k = k(\varepsilon)$  определяется из трансцендентного уравнения

$$(1-\varepsilon)^{-1} = \int_{-k}^k f_0(z) dz + 2f_0(k)\sigma^2 / k.$$

При малых  $\varepsilon$  справедливо приближенное соотношение [9]

$$\varepsilon \approx 2 \left( \frac{k}{\sigma} \right)^{-3} f_0 \left( \frac{k}{\sigma} \right).$$

Аналогично, если  $f_0(z)$  — плотность равномерного распределения на  $[-a, a]$ , то решение имеет вид (4), где  $k = a$ ,  $\alpha = (1-\varepsilon) / (\varepsilon a)$ ,  $c = (1-\varepsilon) / [(2a) \exp(\alpha a)]$ .

Минимаксной оценкой неизвестного центра в этих классах является  $M$ -оценка с определяющей функцией:

— в первом случае

$$\varphi(z) = \begin{cases} z, & |z| \leq k, \\ k \operatorname{sign}(z), & |z| > k; \end{cases}$$

— во втором случае

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & |z| \leq a, \\ (1-\varepsilon) / (\varepsilon a) \operatorname{sign}(z), & |z| > a. \end{cases}$$



4.  $K_K$  — класс приближенно-финитных распределений, для которых

$$\int_{-a}^a f(z) dz = 1 - \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < 1,$$

т.е. с вероятностью  $(1 - \varepsilon)$  измеряемая величина ограничена константой  $a$ .

Получить решение из каких-либо общих соображений в этом случае не удастся. Наименее благоприятное распределение получается здесь как решение вариационной задачи  $I(f) = \min$  со следующими ограничениями:

$$\int_0^{\infty} f(z) dz = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\infty} h(z) f(z) dz = \frac{1 - \varepsilon}{2},$$

где

$$h(z) = \begin{cases} 1, & z \leq a, \\ 0, & z > a, \end{cases}$$

и имеет следующий вид:

$$f^*(z) = \begin{cases} c_1 \cdot \exp(-c_2 \cdot |z|), & |z| > a, \\ c_3 \cdot \cos^2 c_4 \cdot z, & |z| \leq a. \end{cases}$$

Для нахождения  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  используется нелинейная система уравнений, выражающих ограничения (3), а также условия непрерывности и дифференцируемости в точке  $z = a$ . Этому «наихудшему» распределению  $f^*(z)$  соответствует функция  $\psi(z)$  вида

$$\psi(z) = \begin{cases} c_2 \cdot \text{sign} z, & |z| > a; \\ 2c_4 \cdot \text{tg} c_4 z, & |z| \leq a. \end{cases}$$

В частности, при  $\varepsilon = 0$  получаем

$$f^*(z) = \begin{cases} (\pi/a) \cos^2 [\pi z / (2a)], & |z| \leq a; \\ 0, & |z| > a. \end{cases}$$

Соответствующая определяющая функция оценки имеет вид

$$\psi(z) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2a}, & |z| \leq a; \\ 0, & |z| > a. \end{cases}$$

Явный вид оценки в этих случаях получить не удастся, ее придется определять одним из приближенных методов [8, 9].

5. Пусть  $K_H$  — класс  $\varepsilon$ -нормальных распределений, определяемый неравенством

$$|F(z) - \Phi(z)| \leq \varepsilon,$$

где  $\Phi$  — функция распределения стандартного нормального закона.

Общий вид наименее благоприятного распределения для этого класса можно оценить из тех соображений, что и в случае  $K_K$ , но теперь условия гладкости вступают в противоречие с очевидным условием

$$\int f(t) dt = 1,$$

что приводит к искажению центральной части графика плотности. Подобное исследование [9] приводит к плотности

$$f^*(z) = f^*(-z) = \begin{cases} \phi(a) \left[ \cos \frac{dz}{2} / \cos \frac{da}{2} \right]^2, & 0 \leq z \leq a, \\ \phi(z), & a < z < b, \\ \phi(b) \exp[-b(z-b)], & z \geq b. \end{cases}$$

Константы  $a$ ,  $b$ ,  $d$  определяются из системы соотношений

$$d \operatorname{tg}(da/2) = a, \quad (0 \leq da < \pi),$$

$$\int_0^a f^*(z) dz = \int_0^a \phi(z) dz - \varepsilon,$$

$$\int_b^\infty f^*(z) dz = \int_b^\infty \phi(z) dz + \varepsilon,$$

где  $\phi(z)$  — плотность стандартного нормального закона  $N(0,1)$ .

Соответствующая  $M$ -оценка определяется функцией

$$\varphi(z) = \begin{cases} d \cdot \operatorname{tg} \frac{d}{2} z, & |z| \leq a, \\ z, & a < |z| < b, \\ b \cdot \operatorname{sign}(z), & z \geq b. \end{cases}$$

Оценку в явном виде выписать не удастся, ее придется определять на основе одной из рекуррентных процедур, описанных в следующем подразделе.

Более подробно с вопросом, посвященным формированию и идентификации классов распределений, можно познакомиться в [9, 10]. Некоторые классы распределений, их характеристики, соответствующие им функции  $\phi[z]$ ,  $f_0(z)$  и  $M$ -оценки приведены в табл. 1.

**3. Рекуррентные алгоритмы  $M$ -оценивания.** Применение минимаксного подхода к решению задач оценивания состояния торговой ситуации, как правило, приводит к возникновению нелинейных эффектов и, следовательно, к необходимости применения рекуррентных алгоритмов оценивания.

Наличие последовательных процедур обработки статистических данных, отражающих динамику изменения торговой ситуации, позволяет строить достаточно компактные вычислительные схемы, хорошо поддающиеся программированию. Однако наличие нелинейностей создает дополнительные сложности, связанные с анализом сходимости алгоритмов оценивания, определением глобальности найденных экстремумов показателя качества и т.п.

Данное замечание в полной мере относится к оценкам минимального контраста. При этом следует иметь в виду, что для большинства рекуррентных алгоритмов достаточно сделать одну итерацию, исходя из некоторого начального приближения, чтобы получить вычислительную процедуру, которая асимптотически будет обладать теми же свойствами, что и сама изучаемая  $M$ -оценка.

Таблица 1. Классы распределений, их характеристики, соответствующие им функции и  $M$ -оценки

Класс		$\phi(z)$	$f_0(z)$
$K_L$	$f(0) \geq \frac{1}{2a} \geq 0$	$\text{sign}(z)$	$\frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{ z }{a}\right)$
$K_G$	$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f(z) dz,$ $\sigma^2 < \infty$	$z$	$\frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$
$K_F$	$\int_{-a}^a f(z) dz = 1$	$\text{tg} \frac{\pi z}{2a}$	$\begin{cases} \frac{\pi}{a} \cos^2 \frac{\pi z}{2a}, &  z  \leq a \\ 0, &  z  > a \end{cases}$
$K_\kappa$	$\int_{-a}^a f(z) dz = 1 - \varepsilon,$ $0 \leq \varepsilon \leq 1$	$\begin{cases} \text{tg}(b_1 z), &  z  \leq a \\ b_2 \text{sign}(z), &  z  > a \end{cases}$	$\begin{cases} c_1 \exp(-c_2  z ), &  z  > a \\ c_3 \cos^2 c_4 z, &  z  \leq a \end{cases}$
$K_H$	$ f(z) - \phi(z)  \leq \varepsilon,$ $\phi(z) = N'(0,1)$ $0 \leq \varepsilon < 1$	$\begin{cases} z, &  z  \leq a \\ a - \text{sign}(z), &  z  > a \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), &  z  \leq \delta \\ \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{\delta^2 - 2\delta z }{2\sigma^2}\right), &  z  > \delta \end{cases}$
$K_U$	$(1-\varepsilon)f_L(z) + \varepsilon h(z)$ $f_L(z) = U'(0,2a)$ $0 \leq \varepsilon < 1$	$\begin{cases} 0, &  z  \leq a \\ \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a} \text{sign}(z), &  z  > a \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{2a} \exp\left[(1-\varepsilon)\left( z  - \frac{a}{\varepsilon a}\right)\right], &  z  > a \\ \frac{1-\varepsilon}{2a}, &  z  \leq a \end{cases}$

Выборочные свойства такой оценки обычно неизвестны, но и сама М-оценка вводится, прежде всего, исходя из асимптотических соображений, ее свойства при конечных  $n$  почти не поддаются аналитическому исследованию. На этом пути получаются разнообразные одно- и двухшаговые аналоги всех основных известных оценок.

Рассмотрим в этом разделе четыре наиболее употребительных численных метода решения уравнения

$$\sum_{i=1}^n \psi \left( \frac{z_i - Ax}{s} \right) = 0. \quad (5)$$

Все эти методы используют некоторое начальное приближение  $\hat{x}_n^{(o)}$ , в качестве которого чаще всего берется выборочная медиана  $\hat{x}_n^{(o)} = \text{med}(x_1, \dots, x_n)$ .

*Метод Ньютона-Рафсона* [4] основан на разложении левой части уравнения (5) в окрестности точки  $\hat{x}_n^{(o)}$ . По формуле конечных приращений Лагранжа имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left( \frac{z_i - A\hat{x}_n^{(o)}}{s} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \psi \left( \frac{z_i - A\hat{x}_n^{(o)}}{s} \right) - A(\hat{x}_n - \hat{x}_n^{(o)}) s^{-1} \sum_{i=1}^n \psi \left[ \frac{z_i - A\hat{x}_n^{(o)} - \varepsilon(A\hat{x}_n - A\hat{x}_n^{(o)})}{s} \right] = \quad (6) \\ & = 0, \end{aligned}$$

где  $0 < \varepsilon < 1$ ;  $\hat{x}_n$  — корень уравнения (6),  $\hat{x}_n^{(o)}$  — начальное приближение.

Полагая в (6)  $\varepsilon = 0$ , получаем процедуру

$$\hat{x}_n^{(k+1)} = \hat{x}_n^{(k)} + s \frac{\sum_{i=1}^n \psi \left[ (z_i - A\hat{x}_n^{(k)}) / s \right]}{\sum_{i=1}^n \psi' \left[ (z_i - A\hat{x}_n^{(k)}) / s \right]}. \quad (7)$$

*H-метод* [4] представляет собой упрощенную версию (6):

$$\hat{x}_n^{(k+1)} = \hat{x}_n^{(k)} + (s/n) \sum_{i=1}^n \psi \left[ (z_i - A\hat{x}_n^{(k)}) / s \right].$$

Метод взвешенных наименьших квадратов [18]:

$$\hat{x}_n^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i z_i}{\sum_{i=1}^n W_i} = \hat{x}_n^{(k)} + \frac{s \sum_{i=1}^n \psi \left[ (z_i - A \hat{x}_n^{(k)}) / s \right]}{\sum_{i=1}^n W_i}, \quad W_i = \frac{\psi \left[ (z_i - A \hat{x}_n^{(k)}) / s \right]}{\left( z_i - A \hat{x}_n^{(k)} \right) / s}.$$

Метод стохастической аппроксимации [8–11] первоначально создан специально для решения вычислительных задач математической статистики.

Рассмотрим упрощенное уравнение для прямых измерений параметров состояния рынка

$$\sum_{i=1}^n \psi(z_i - x) = 0.$$

и выпишем его для выборки  $z_1, \dots, z_k$  и для выборки  $z_1, \dots, z_{k+1}$ :

$$\sum_{i=1}^n \psi(z_i - \hat{x}_k) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \psi(z_i - \hat{x}_{k+1}) = 0.$$

Вычтем первое уравнение из второго и применим к разностям  $\psi(z_i - \hat{x}_{k+1}) - \psi(z_i - \hat{x}_k)$  формулу Лагранжа. Полагая, как это было сделано в (7), неизвестные коэффициенты  $\varepsilon_i$  равными нулю, получим приближенное равенство

$$\psi(z_i - \hat{x}_{k+1}) - \sum_{i=1}^n \psi(z_i - \hat{x}_k) (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) \approx 0.$$

Считая разность  $\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k$  малой, можно переписать (7) в виде:

$$\hat{x}_n^{(k+1)} = \hat{x}_n^{(k)} + \frac{\psi(z_i - \hat{x}_k)}{\sum_{i=1}^n \psi'(\hat{x}_i - \hat{x}_k)}. \quad (8)$$

Данная рекуррентная процедура может использоваться на практике, но ее свойства трудно исследовать, и, к тому же, она требует на каждом шаге привлечения всех предыдущих значений  $z_i$ . Алгоритм (8) можно упростить, заметив, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi'(z_i - \hat{x}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} E \{ \psi'(z_i - x) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(t) f(t) dt$$

позволяет перейти к процедуре

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \gamma_k \psi(z_i - \hat{x}_k), \quad (9)$$

свойства которой, разумеется, сильно зависят от управляющей последовательности констант  $z \{ \gamma_k \}$  и от выбора начального приближения  $\hat{x}_0$ .

Наблюдения в (9) обрабатываются последовательно, и каждый шаг требует минимального объема вычислений. Конечно-выборочные свойства получающихся оценок известны очень плохо, а относительно асимптотических свойств имеет место следующий фундаментальный результат [17]. Пусть функция  $\psi(z)$  ограничена и, кроме того, выполняется одно из следующих условий:

- $\psi(z)$  непрерывна, но плотность  $f(z)$  строго положительна на некотором интервале, где  $\psi(z) \neq \text{const}$  ;
- $\psi(z)$  разрывна, но плотность  $f(z)$  строго положительна на некотором интервале, где  $\psi(z) \neq \text{const}$  ;
- $\psi(z)$  разрывна, но плотность  $f(z)$  строго положительна в одной из точек разрыва  $\psi(z)$  .

Пусть  $\{ \gamma_k \}$  — произвольная последовательность констант, для которых

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty.$$

Тогда для любого ограниченного начального приближения  $\hat{x}_0$  последовательность (9) сходится к «истинному» значению  $x$  почти наверное и в среднеквадратичном. Если

$$\gamma_k = \gamma / (k + 1), \quad \text{где } \eta > 0,5 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

то

$$\sqrt{R}(\hat{x}_k - x) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} N(0, D(f, \psi, \gamma)),$$

$$D(f, \psi, \gamma) = \gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 f dx / \left[ 2\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} f d\psi - 1 \right].$$

Последнее выражение достигает минимального значения при значении  $\gamma$ , получаемой по формуле

$$\gamma = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f d\psi \right]^{-1}. \quad (10)$$

В частности, при  $\psi = f' / f$  значение асимптотической дисперсии совпадает с нижней границей, даваемой неравенством Рао—Крамера, так что оценка оказывается асимптотически эффективной.

При ограничениях  $\psi(z)$  свойства оценки сильно зависят от выбора начального приближения  $\hat{x}_0$ . В случае невыпуклой функции контраста  $p(z)$  (немонотонной  $\psi(z)$ ) уравнение (9) может иметь больше одного решения. Это может сильно осложнить задачу с вычислительной точки зрения. Один из возможных подходов состоит в том, чтобы сначала осуществить несколько итераций с помощью алгоритма с монотонной  $\psi(z)$ , а несколько завершающих итераций — с более сложной немонотонной функцией  $\psi(z)$ .

Поскольку истинная плотность  $f(z)$  в интересующих нас задачах неизвестна, оптимальное значение  $\gamma$ , даваемое формулой (10), недостижимо, и его приходится определять приближенно. Для этого можно использовать один из следующих способов:

1) если задан класс распределений, к которому принадлежит  $f$ , то можно использовать  $\gamma$ , оптимальное по отношению к наименее информативному распределению  $f^*(z)$  из этого класса:

$$\gamma^* = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) [\ln f^*(t)]' dt \right]^{-1} = [I(f^*)]^{-1}.$$

2) величину  $\int_{-\infty}^{+\infty} f d\psi$  можно оценить непосредственно по выборке, либо приняв в качестве плотности распределения какую-нибудь из ее



непараметрических оценок, либо воспользовавшись приближенным равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f d\psi \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi'(z_i - x^*) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi'(z_i - \hat{x}_n).$$

3) последнее равенство можно использовать рекуррентно, уточняя значение  $\gamma_k$  на каждом шаге по формуле

$$\gamma_{k+1}^{-1} = \gamma_k^{-1} + \psi'(z_{k+1} - \hat{x}_k).$$

Приведенные методы можно практически без изменений применить в задаче (5), используя некоторую заранее вычисленную оценку параметра масштаба  $s$ , но при этом утрачивается одно из основных достоинств алгоритмов стохастической аппроксимации — возможность обработки измерений последовательно, по мере их поступления. Асимптотические свойства полученных оценок также, разумеется, несколько изменятся.

В работах [9, 10] рассмотрены алгоритмы метода стохастической аппроксимации с рекуррентной настройкой параметра масштаба. В одном из вариантов он сводится к следующей системе рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_k + \gamma_k \psi[(z_{k+1} - \hat{x}_k)/s], \\ s_{k+1} &= s_k - \mu_k [s_k - (z_{k+1} - \hat{x}_k) \psi'[(z_{k+1} - \hat{x}_k)/s]], \\ \gamma_{k+1}^{-1} &= \gamma_k^{-1} + s_k^{-1} \psi'[(z_{k+1} - \hat{x}_k)/s], \\ \mu_{k+1}^{-1} &= \mu_k^{-1} + 1 + s_k^{-2} (z_{k+1} - \hat{x}_k)^2 \psi'[(z_{k+1} - \hat{x}_k)/s]. \end{aligned}$$

В случае использования модели косвенных наблюдений соответствующие алгоритмы стохастической аппроксимации несколько усложняются. При этом в качестве управляющего коэффициента выбирается некоторая положительно определенная симметричная матрица  $\Gamma_n$  размера  $m \times m$ . Рассмотрим следующий рекуррентный процесс:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \Gamma_{k+1} A^T \psi(z_{k+1} - A_k \hat{x}_k), \quad (11)$$

где через  $A_k$  обозначена  $k$ -я строка матрицы  $A$ .

При довольно общих условиях относительно матриц  $\Gamma_k$  удается получить аналоги выводов о состоятельности, эффективности и асимптотической нормальности. Эти результаты, в частности, имеют место при

$$\Gamma_k = \frac{\gamma}{k} (A^T A)^{-1}, \quad \gamma = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d\psi^*(t) \right\}^{-1}.$$

Однако вопрос об оптимальности выбора  $\Gamma_k$  окончательного решения не имеет. В [10] рассмотрен робастный аналог рекуррентного алгоритма наименьших квадратов с

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_k - \frac{\Gamma_k A_{k+1}^T A_{k+1} \Gamma_k}{[\psi'(z_{k+1} - A_{k+1} \hat{x}_k)]^{-1} + A_{k+1} \Gamma_k A_{k+1}^T},$$

известны и другие возможности. Общий вывод состоит в том, что рекуррентные оценки вида (11) обладают теми же асимптотическими свойствами, что и обычные, нерекуррентные, но выгодно отличаются от них своей простотой. Скорость сходимости рассматриваемых процессов существенно зависит от выбора начального приближения. Обычно в качестве нулевого приближения берут одну из простых нерекуррентных оценок типа медианы, вычисленную на основе нескольких первых наблюдений.

Отметим, что изложенные здесь методы не используют существенным образом линейной структуры рассматриваемой модели и могут применяться, например, к анализу схемы нелинейной регрессии

$$z_k = f(A_{k1}, \dots, A_{km}, x_1, \dots, x_m) + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

где «ошибки»  $\varepsilon_k$  независимы и имеют одинаковую симметричную плотность  $f(t)$ . В случае, когда величины  $A_{ij}$  считаются известными параметрами, все результаты, связанные с построением  $M$ -оценок, остаются в силе. Сложности возникают лишь в связи с решением системы уравнений (11).

Очевидно, что алгоритмы стохастической аппроксимации будут существенно изменяться в зависимости от априорного выбора класса возможных распределений. В табл. 2 приведены алгоритмы данного типа для некоторых основных классов распределений, рассмотренных выше.

Таблица 2. Алгоритмы для некоторых основных классов распределений

Класс	Рекуррентный процесс
$K_L$	$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \gamma_k A_k^T W_k \text{sign}(A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1})$
$K_G$	$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \gamma_k A_k^T W_k (A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1})$ $\gamma_k = \frac{1}{k} (A_k^T W_k A_k)^{-1}$
$K_F$	$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \gamma_k A_k^T W_k \text{tg} \left[ \frac{\pi}{2a} (A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1}) \right]$
$K_\kappa$	$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \gamma_k A_k^T W_k \left\{ \text{tg} \left[ b_1 (A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1}) \right] E'_a(z) + \right.$ $\left. + b_2 \text{sign}(A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1}) E''_a(z) \right\}$ $E'_a(z) = \begin{cases} 1, &  z  \leq a \\ 0, &  z  > a \end{cases} \quad E''_a(z) = \begin{cases} 1, &  z  > a \\ 0, &  z  \leq a \end{cases}$
$K_H$	$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \gamma_k A_k^T W_k \left\{ (A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1}) E'_a(z) + \right.$ $\left. + a \text{sign}(A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1}) E''_a(z) \right\}$
$K_U$	$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \Gamma_k A_k^T W_k E''_{2a}(z) \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a} \text{sign}(A_k^T W_k \hat{x}_k - z_{k+1})$

Скорость сходимости рассмотренных процессов оценивания существенно зависит от выбора начального приближения. В качестве нулевого приближения может быть принята какая-либо известная нерекуррентная оценка, полученная, например, по МНК или по методу наименьших модулей.

Для проверки эффективности и устойчивости предложенных алгоритмов использовались программные модели изменения состояния параметров рынка с различными вариациями статистической структу-

ры относительно опорной стационарной гауссовской модели стохастической компоненты наблюдений.

Рассматривалась задача численного восстановления параметров линейного полинома, моделирующего локальное изменение котировок актива на заданном временном интервале работы рынка.

Решение осуществлялось путем итерационного оценивания параметров положения при обработке полученной совокупности наблюдений по МНК и по одному из робастных рекуррентных алгоритмов, отвечающих соответствующему классу распределений. Полученные расчеты наглядно показывают повышенную устойчивость предложенных робастных алгоритмов. В частности, для наиболее близких к реальным моделям погрешностей измерений с распределением типа «засоренного» гауссовского с  $\varepsilon = 0,1 \dots 0,2$  и  $\sigma = 3$  относительный выигрыш  $M$ -оценки по сравнению с результатами, полученными по МНК, составит после первой итерации 25–35 %, а после второй итерации — 30–40 %. В случае других типов возможных распределений выигрыш также является весьма значительным, а для «засоренных» типа Коши и Лапласа МНК, в отличие от устойчивых методов, вообще не обеспечивает состоятельного оценивания.

#### **4. Применение робастных алгоритмов регрессионного анализа в задачах оценивания изменения состояния фондового рынка.**

Исследования, проведенные в предыдущем подразделе, показали, что статистическая технология робастификации алгоритмов оценивания позволяет снизить чувствительность формируемых оценок к вариациям вероятностных характеристик наблюдаемого процесса. В частности, робастные оценки менее чувствительны к вариациям функции распределения, и в определенных случаях применимы к обработке нестационарных процессов. При этом предполагается, что вариации функции распределения не выводят их за пределы некоторого априори заданного класса, характеризуемого известным набором ограничений. Расширение класса допустимых вариаций функции распределения неизбежно приводит к ориентации на более «загрубленные» методы обработки, и, как следствие, к той или иной форме снижения качества оценивания. В частности, для алгоритмов формирования системной компоненты динамики котировок, снижение чувствительности следящего фильтра ведет к росту задержки оценки (лага), который, в свою очередь, приводит к снижению качества управления торговыми операциями.

Таким образом, возникает необходимость в построении версий робастификации алгоритмов обработки данных, позволяющих, с од-

ной стороны, сохранить их устойчивость к вариациям статистических характеристик наблюдаемых процессов, а с другой стороны, обеспечить их чувствительность к изменениям системной составляющей динамики котировок, используемой в процессе выработки управляющих решений.

Для решения данной задачи в качестве следующего примера робастификации алгоритма обработки данных рассмотрим задачу последовательного регрессионного оценивания системной составляющей изменения котировки индекса фондового рынка по наблюдениям за состоянием валютного рынка. При этом в качестве регрессоров используем совокупность опорных валют  $\{EURUSD, EURJPY, USDJPY\}$ , определяющих динамику большинства основных трендов на валютном рынке.

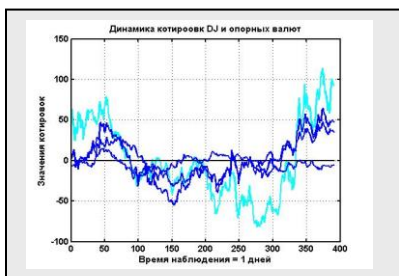


Рис. 1. Пример изменения котировок индекса DJ и соответствующие ему изменения котировок опорных валют.

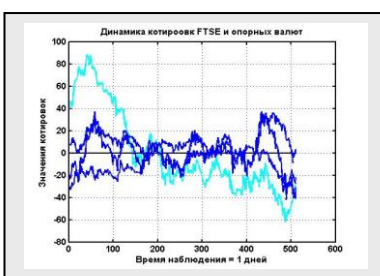


Рис. 2. Пример изменения котировок индекса FTSE и соответствующие ему изменения котировок опорных валют.

Примеры изменения котировок индексов DJ и FTSE в течение одной торговой сессии и соответствующие им изменения котировок опорных валют представлены на рис. 1 и 2. Из приведенных графиков видно, что на всем интервале работы торговой сессии корреляционные связи между фондовыми индексами и значениями валютных инструментов выражены достаточно слабо. Тем не менее, несмотря на общую слабую линейную взаимосвязь, на коротких интервалах времени, прилежащих к моменту оценивания, корреляционные связи выражены более сильно и позволяют формировать достаточно точные оценки системной составляющей. В качестве примера на рис. 3 и 4 приведены регрессионные оценки индексов DJ и FTSE по опорным

валютным регрессорам {EURUSD, EURJPY, USDJPY}, построенные на скользящем окне наблюдения, равным 10 минутным отсчетам.

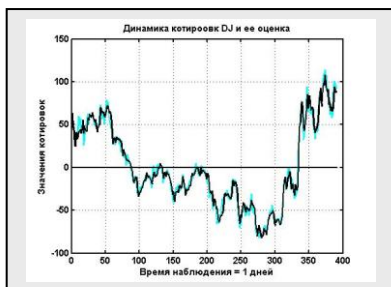


Рис. 3. Пример восстановления котировок индекса DJ по опорным валютным регрессорам.

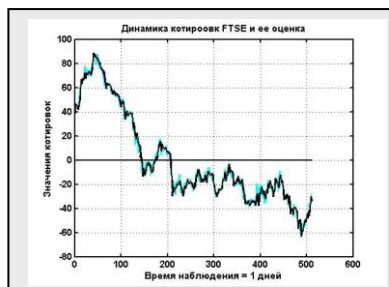


Рис. 4. Пример восстановления котировок индекса FTSE по опорным валютным регрессорам.

В принципе, при удачном выборе скользящего окна наблюдения регрессионные технологии скользящего оценивания позволяют получить эффективные торговые стратегии. Однако их эффективность будет существенно зависеть от структуры наблюдаемого процесса, которая в силу своей хаотической природы непрерывно меняется. Попытки создания адаптивных контуров (путем подстройки размера скользящего окна наблюдения) не приводят к положительному результату в силу наличия в рядах наблюдений хаотической компоненты (непериодического колебательного процесса).

Рассмотрим в качестве системной составляющей, используемой для формирования торговых решений, сглаженную ошибку регрессионной оценки. В основе предлагаемой стратегии лежит гипотеза о том, что валютные и фондовые рынки являются двумя взаимосвязанными процессами, отражающими общие мировые экономические процессы. В этом случае возникает принципиальная возможность восстановления значений индексов площадок фондового рынка по опорным валютным регрессорам. При этом можно предположить, что если регрессионная оценка индекса превышает его текущую котировку, то это свидетельствует о рыночной недооценке данного индекса (с точки зрения состояния валютного рынка). В этом случае рынок в силу своей корректирующей природы будет увеличивать стоимость котировки индекса. И наоборот, если регрессионная оценка окажется ниже текущей котировки индекса, то это означает его переоценку с точки зрения валютного рынка, и котировки индекса должны падать. Отсюда непосредственно

вытекает вариант торговой стратегии, в соответствии с которой открытие позиции «вверх» следует осуществлять в случае перегиба сглаженной функции погрешности вниз, и, наоборот, открытие позиции «вниз» надо осуществлять в случае перегиба указанной функции вверх.

Разумеется, выполнение данной гипотезы, и успешность основанной на ней торговой стратегии, следует ожидать только в среднем. На практике имеют место ситуации, при которых данные соображения будут некорректными. Так, например, в случае, когда недооценка котировки индекса совпадает с сильным положительным трендом и самого индекса, и его оценки, то о снижении котировки индекса можно говорить лишь в относительных единицах, в том смысле, что динамики индекса и оценки будут сближаться. Однако общий положительный тренд останется доминирующим, результирующая динамика котировки будет направлена вверх и управление приведет к проигрышу.

Наилучшую эффективность, соответствующую выдвинутой гипотезе, торговая стратегия может дать на участках с сильной флуктуационной компонентой и незначительным общим трендом. В качестве соответствующего примера на рис. 5 и 6 приведены графики центрированных значений котировок индексов DJ и FTSE для однодневных сессий, графики их регрессионных оценок по валютным регрессорам и сглаженные графики изменения погрешностей их регрессионных оценок. Для наглядности значения сглаженных погрешностей (будем далее называть их невязками) увеличены в 4 раза.

Осуществим идентификацию перегибов сглаженной функции невязок (погрешностей регрессионной оценки) в соответствии со вторым вариантом этой процедуры, описанным в предыдущем подразделе. Рассмотрим перегибы линии невязок как идентификаторы моментов открытия позиций.

Эффективность управления (открытия позиций) будем считать, используя подпрограмму Total, предназначенную для подсчета выигрышных и проигрышных открытий для заданных уровней выигрыша TP и проигрыша SL. На рис. 7 и 8 в качестве примера представлены динамика котировок индекса DJ, сглаженная линия невязок с тем же коэффициентом передачи экспоненциального фильтра  $\alpha = 0.05$  и индикаторы открытия, соответствующие перегибам линии невязок, обозначенные в виде звездочек на линии изменения котировок. На рис. 7 приведены графики, соответствующие оцениванию котировок DJ на основе описанного классического регрессионного оценивания по МНК на скользящем окне наблюдения в 20 одноминутных отсчетов.

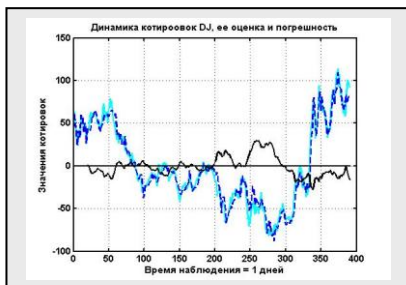


Рис. 5. Динамика котировок DJ, ее регрессионная оценка и сглаженная погрешность оценивания.

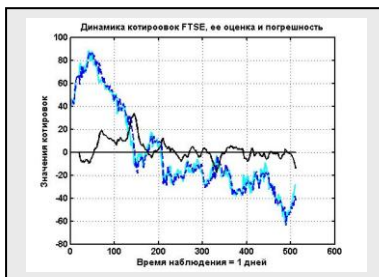


Рис. 6. Динамика котировок FTSE, ее регрессионная оценка и сглаженная погрешность оценивания.

На рис. 8 приведены аналогичные результаты, однако графики были построены на основе робастифицированного скользящего алгоритма по МНК (РМНК).

В основу робастификации регрессионного анализа положена вычислительная схема *M*-оценивания для случая класса «засоренных» нормальных распределений. В этой ситуации модификация вычислительного алгоритма может быть сведена к последовательной схеме винзорирования значений регрессоров, в роли которых, как уже отмечалось, выступают котировки опорных валют. Схема винзорирования включает в себя последовательное формирование сглаженных значений регрессоров. В качестве сглаживающего алгоритма можно использовать любой последовательный фильтр (МНК, фильтр Калмана, фильтры с конечной памятью и т.п.). В данном случае для простоты повторно использовался экспоненциальный фильтр с таким же коэффициентом передачи  $\alpha = 0.05$ .



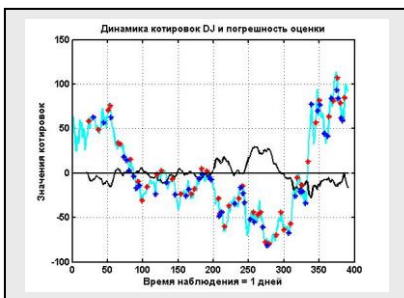


Рис. 7. Индикаторы открытия позиций для котировок DJ, построенные на основе невязок оценивания по МНК.

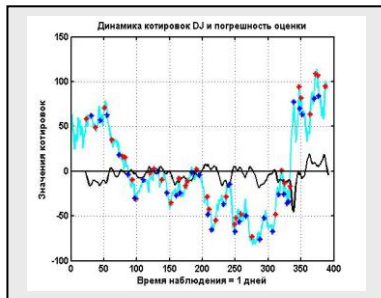


Рис. 8. Индикаторы открытия позиций для котировок DJ, построенные на основе невязок оценивания по РМНК.

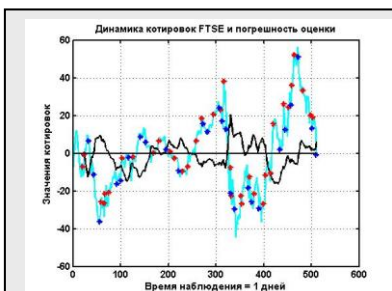


Рис. 9. Индикаторы открытия позиций для котировок FTSE, построенные на основе невязок оценивания по МНК.

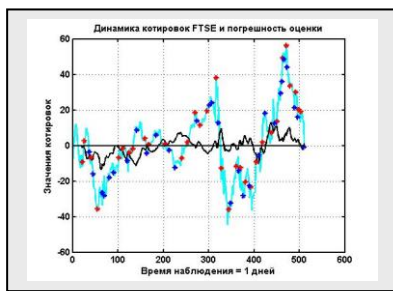


Рис. 10. Индикаторы открытия позиций для котировок FTSE, построенные на основе невязок оценивания по РМНК.

Для данного конкретного примера при использовании традиционной регрессионной оценки относительное число ошибочных открытий  $p_{Lost}$  составило 47,06 %, в то время как для робастифицированной схемы — 40 %. Как правило, неадаптированные схемы робастификации позволяют повысить качество управления не более чем на 10 %, однако это значение во многих случаях оказывается достаточным, чтобы перейти от проигрышной торговой сессии к выигрышной. В качестве подтверждающего примера рассмотрим аналогичные результаты для восстановления значений индекса FTSE по котировкам тех же опорных валют в течение однодневной торговой сессии. Соответствующие графики представлены на рис. 9 и 10.

При использовании традиционной регрессионной оценки показатель качества управления (соотношение ошибочных и успешных открытий) составило 50,8 %, в то время как для робастифицированной схемы — 46,6 %.

**5. Заключение.** Приведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что снижение чувствительности регрессионных оценок к вариациям функции распределения в рамках заданного класса допустимых распределений (т.е. робастификация алгоритма оценивания) позволяет повысить качество управления торговыми операциями.

При этом динамическая подстройка робастифицированной версии, в отличие от традиционной схемы последовательного оценивания, не требует высокой оперативности, поскольку относится не к динамике наблюдаемого процесса, а к изменению достаточно широкого класса распределений. В связи с этим данный подход допускает дальнейшее повышение эффективности за счет применения адаптивных методов. Данный вопрос можно рассматривать как перспективу для продолжения настоящих исследований.

### Литература

1. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980. 300 с.
2. Введение в теорию порядковых статистик / Под ред. А.Е. Сархана и Б.Г. Гринберга. М.: Статистика, 1970. 414 с.
3. *Ершов А.А.* Стабильные методы оценки параметров // Автоматики и телемеханика. 1978. № 8. С. 66–100.
4. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи / Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 900 с.
5. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. 349 с.
6. *Макианов А.В., Мусаев А.А.* Робастные методы обработки результатов измерений. М.: Изд. МО СССР, 1980. 144 с.
7. *Мусаев А.А.* Устойчивые методы определения движения. Л.: Изд. МО СССР, 1989. 172 с.
8. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.
9. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Помехоустойчивая идентификация // Тр. 4-го симп. ИФАК «Идентификация и оценка параметров систем». Ч. 1. Тбилиси, 1976. С. 190–213.
10. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Стабильное оценивание в условиях неполной информации. Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Наука, 1977. С. 20–58.
11. *Стогов Г.В., Макианов А.В., Мусаев А.А.* Устойчивые методы обработки результатов измерений // Зарубежная радиоэлектроника. 1982. № 9. С. 3–46.
12. *Тарасенко Ф.П.* Непараметрическая статистика. Томск: Изд. ТГУ, 1976. 292 с.
13. *Тьюки Дж.* Анализ результатов наблюдений / Пер. с англ. В.Ф. Писаренко. М.: Мир, 1981. 693 с.
14. *Хьюбер П.* Робастность в статистике / Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 303 с.

15. *Эльясберг П.Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
16. *Deniau C., Oppenheim G., Viano C.* Robustesse: P-robustesse et minimax. Asterisque, 1977. N 43–44. P. 151–166/
17. *Huber P.J.* Robust estimation of a location parameter // Ann. Math. Statist. 1964. V. 35. N 1. P. 73–101 p.
18. *Rey W.J.* Robust statistical methods // Lect. Notes. Math. 1978. N 680. 128 p.
19. *Staudte R.G.* Robust estimation // Queen's Pap. Pure Appl. Math. 1980. N 43. 107 p.

**Мусаев Александр Азерович** — д-р техн. наук, профессор; ведущий научный сотрудник научно-исследовательской группы информационных технологий в образовании Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН), научный консультант ОАО «Специализированная инжиниринговая компания «Севзапмонтажавтоматика». Область научных интересов: анализ данных, управление и прогнозирование в сложных динамических системах, стохастические хаотические системы. Число научных публикаций — 172. amusaev@szma.com, www.szma.com; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; p.т. +7(812)350-5885, факс +7 (812)350-1113.

**Musaev Alexander Azerovich** — Dr. in Appl. Math., professor; leading researcher, Education Information Technology Group, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS), expert, public corporation Specialized engineering company "Sevzapmontageautomatica". Research interests: data analysis, complicated dynamic systems prognosis and control, stochastic chaos systems. The number of publications — 172. amusaev@szma.com, www.szma.com; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)350-5885, fax +7(812)350-1113.

Рекомендовано ИГИТО СПИИРАН, руководитель канд. техн. наук, доцент А. В. Тишков.

Статья поступила в редакцию 21.12.2010.

## РЕФЕРАТ

### **Мусаев А.А. Методы построения робастифицированных систем анализа торговых ситуаций.**

Важным элементом торговых операций, проводимых на фондовом, валютном и других рынках капитала, является анализ текущей торговой ситуации, используемой для формирования управляющих (торговых) решений. Различают фундаментальный анализ торговой ситуации, основанный на общих представлениях трейдера о возникновении и степени воздействия разнородных факторов влияния на динамику котировок рабочих инструментов, и технический анализ, связанный с изучением динамики трендов на отдельных торговых площадках. Исследования, приведенные в настоящей статье, ограничиваются вопросами технического анализа, а в качестве примеров рассмотрены задачи анализа изменения котировок фондовых индексов DJ (нью-йоркская фондовая биржа) и NTSE (лондонская биржа).

Главной особенностью настоящей работы является применение робастных методов оценивания к задаче восстановления системной составляющей динамики котировок. Под системной составляющей понимается сглаженная кривая, отражающая значимые изменения динамики котировок и фильтрующая локальные флуктуации, приводящие к «ложным тревогам» при формировании управляющих торговых решений. При этом качество восстановления системной составляющей протекающих процессов определяется на основе терминальных торговых показателей и, следовательно, непосредственно связано со структурой и параметрами используемой торговой стратегией.

Одной из проблем, возникающих при формировании системной составляющей, является нестационарность случайной компоненты рядов наблюдений. Наличие неперiodических колебаний в динамике котировок не позволяет эффективно использовать известные методы статистической обработки данных.

В основу алгоритмов устойчивого последовательного формирования системной составляющей положена технология робастного оценивания, в частности, оценки минимального контраста ( $M$ -оценки). При этом априори определяется класс распределений, в рамках которого допускаются возможные изменения функции распределения. Для заданного класса отыскивается наименее благоприятное распределение, используемое для построения оценки максимального правдоподобия. При этом под наименее благоприятным распределением понимается распределение из заданного класса, минимизирующее значение информанта Фишера. Таким образом,  $M$ -оценки представляют собой версию минимаксных оценок, обеспечивающих наилучшее качество оценивания при любых изменениях функции распределения в пределах заданного класса распределений.

Исследованию эффективности применения оценок минимального контраста в задачах анализа динамики фондовых индексов и посвящена настоящая статья.

## SUMMARY

### ***Musaev A.A. Method of Robust Trade Situations Analysis Systems Construction.***

Important element of the trading operations, spent on stock, currency and other markets of the capital, is the analysis of the current trading situation, used for operating (trading) decisions formation. Generally, a main task of such analysis is a financial tools quotations forecasting. The trading situation fundamental analysis, based on the general trader representations about occurrence and degree of diverse factors influence on working tools quotations dynamics, and the technical analysis, connected with studying of trends dynamics on separate trading platforms, are distinguished. The researches, resulted in present article, are limited to questions of the technical analysis. As examples problems of stock indexes DJ (the New York stock exchange) and NTSE (the London stock exchange) quotations dynamics analysis are considered.

The main feature of the present work is robust estimation methods application to a problem of dynamics system component of quotations restoration. Under system component is understood the smoothed curve, reflecting significant changes of quotations dynamics and filtering local fluctuations, leading to "false alarms" at operating trading decisions formation. Thus quality of a proceeding processes system component restoration is defined on the basis of terminal trading indicators and, hence, is directly connected with structure and parameters used trading strategy.

One of the problems arising at system component formation, is nonstationary casual components of current processes. Presence of acyclic fluctuations in dynamics of quotations doesn't allow to use known methods of statistical data processing effectively.

Robust estimations, in particular, estimations of the minimum contrast (M-estimation) are the math technology, which is laid down in a basis of system component steady consecutive formation algorithms. Thus the distributions class, in which frameworks possible changes of distribution function are supposed, is a priori defined. For the set class the least favorable distribution used for construction of an estimation of the maximum probability is found.

The least favorable distribution is understood as distribution from the set class, minimizing value of an informant of Fisher. Thus, M-estimations represent the version of the minimax estimations providing the best quality of estimation at any changes of function of distribution within the set class of distributions.

The present article is devoted to research of efficiency of the minimum contrast estimations application in the task of the stock indexes dynamics analysis.