УЧЕТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТКАЗОВ ЭЛЕМЕНТОВ В МОДЕЛЯХ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ

Можаев А.С., СПб, ВМА им. Н.Г.Кузнецова
Синещук Ю.И., СПб, ВМИРЭ

Одним из ограничений практически всех методов анализа устойчивости является допущение, согласно которому мгновенные состояния элементов однозначно определяют состояние системы в тот же момент времени. Невозможность учитывать очередность наступления отказов является, серьезным недостатком широко используемых булевых моделей надежности. Это приводит к тому, что при оценке системного показателя безотказной работы системы как функции:

$$Ps(t) = P(y_s(t) = 1) = P(T_{so}, > t^o) = f(P_1(t), P_2(t).. P_l(t).. P_n(t)),$$

мы не можем каким-либо образом учесть, или что-либо сказать о возможной временной последовательности отказов элементов системы, приводящей ее в рассматриваемое состояние. Однако, анализ функционирования многих технических систем с широким использованием подключаемых средств защиты и реконфигурации свидетельствует о существенном влиянии временной последовательности отказов на конечное состояние системы. Зачастую, важен не сам момент отказа конкретного элемента, а его относительное положение во временной последовательности отказов элементов системы.

Рассмотрим систему из п элементов. В этой системе m≤n элементов могут отказывать в той или иной последовательности. В общем виде математическая постановка задачи сводится к вычислению вероятности нахождения системы в состоянии, в которое она попадает при реализации заданной последовательности отказов конкретных m из п элементентов:

$$P\ \{\ P_n m\ \} = P\{0 \le Tio \le Til \le Tim \le t;\ T_{j\neq i} \ge t\}$$

где $P_n m$ - заданная последовательность отказов элементов;
m - число элементов, образующих заданную последовательность отказов;
i - номера элементов, образующих заданную последовательность отказов;
j - номера элементов, находящихся в работоспособном состоянии на рассматриваемом интервале времени.

Т.о., эта вероятность характеризует событие, состоящее в том, что за рассматриваемое время (t) в системе откажут в строго определенной последовательности ровно m элементов с номерами io , ii, ...,im, а остальные (n-m) элементов на рассматриваемом интервале (o÷t) сохранят свою работоспособность. Возможно несколько вариантов задания указанного события [1]:

1) В виде частично упорядоченной логической конъюнкции элементарных событий, характеризующих состояние отдельных элементов:
2)

$$\Pi_n^m = i_1 i_2 \ldots i_m\ i_{m+1} .. i_n$$

1÷m - группа событий, характеризующих на момент времени t ровно m элементов в заданной последовательности от i до i_m включительно;
m+1÷n - группа событий, характеризующих безотказность (n-m) элементов на момент времени t.

2) В терминах многозначной логики , с помощью n- мерного вектора:

$$Z=(Z_1 Z_2,...Za.)$$

компоненты которого принимают целочисленные значения: Zi= 0÷m .Компоненты, соответствующие работоспособным элементам (n-m), принимают значение "0". Компоненты, соответствующие отказавшим элементам (m), принимают значение равное их позиционным номерам в рассматриваемой последовательности отказов: Zim=l÷m

3) Поскольку последовательность отказавших элементов однозначно определяет состояние системы, то она может характеризоваться укороченным вектором состояния в виде вектора последовательности:

$$Pm = \{i_1.\ i_2 \ldots\ldots im\}$$

где указаны номера отказавших элементов в той последовательности, в которой происходили отказы.

Все три варианта однозначно определяют состояние системы, в котором она оказывается в результате определенной последовательности отказов ее элементов.

Логическая функция, описывающая состояние системы (y_c), в данном случае является функцией последовательности отказов элементов (Pm). При этом система считается работоспособной, если:

$$Ус(Pm)=1$$

а соответствующая вероятность:

$$Pc=P\{Ус(Pm=1\}$$

характеризует событие, состоящее в том, что рассматриваемая последовательность не выводит систему в область отказа.

Граф возможных последовательностей отказов элементов системы может быть представлен в виде последовательного дерева отказов.

Каждый узел графа определяет состояние системы с учетом последовательности отказов элементов, приведших ее в это состояние. Каждая ветвь графа (или ее фрагмент) определяет одну из возможных последовательностей.

В общем случае, для характеристики последовательного дерева отказов можно предложить следующие показатели:

1) Уровень графа, характеризующий совокупность последовательностей, приводящих систему в состояние с m отказавшими элементами: $m=0+n$
2) Число уровней в графе: $k=n+l$
3) Общее число возможных последовательностей: $P^{(m-n)}=n!$
4) Число последовательностей, приводящих к выходу из строя заданных m элементов: $M^{(m)}=m!$
5) Число состояний на уровне m: $Sn^{(m)} = n!/(n-m)!$

Этот же показатель определяет число возможных последовательностей выхода системы на m-ый уровень.

6)Общее число состояний в графе: $Sn=nS_{n-1}+1$, $So=l$

Тогда, учитывая, что вероятность события, состоящего в работоспособности (n-m) и отказе отдельных т элементов (без учета последовательности) равна:

$$Pn^{(m)}=p^{n-m} q^m$$

можно утверждать, что искомая вероятность состояния с определенными m элементами, отказавшими в заданной последовательности есть:

$$P_n^m=1/m!\ p^{n-m} q^m$$

Дополнительной вероятностной характеристикой данного графа может служить вероятность нахождения системы на уровне m (с m произвольными отказавшими элементами):

$$R_n^m = C_n^m\ p^{n-m} q^m = n!/m!(n-m)\ \ p^{n-m} q^m$$

Так, для равнопараметрической системы с n=2.

a) $P_2^{(1)}=R_2^{(1)}=P_2^1=qp$
b) $P_{2\ (2)}=R_2^{(2)}=q^2$; $P_2^{(2)}=P^{(1,2)}=1/2\ q^2$

а для системы с n=3:

a) $P_3^{(1)}=qP^2=P_3^1$; $R^3\ (1)=3qP^2$
b) $P_3^{(2)}=q^2P$; $P_3^{(2)}=1/2\ q^2P$; $R_3^{(2)}=3q^2P$
c) $P_3^{(3)}=q^3$; $P_3^{(3)}=1/6q^3$; $R_3^{(3)}=q3$

Принципиальной особенностью практической реализации современных КТС является наличие различного рода переключающих устройств, непосредственно обеспечивающих принятый режим управления состоянием системы при отказе ее элементов в той или иной последовательности, В связи с этим актуальной становится задача учета надежности "переключателей" в моделях устойчивости.

Реальность постановки этой задачи для равнопараметрических систем произвольной структуры основывается на возможности описания заданной последовательности отказов элементов системы предложенными выше вероятностными характеристиками. При этом заданная последовательность должна предварительно анализироваться на реализуемость, возможность и допустимость. Реализуемость последовательности определяется ограничениями накладываемыми на модель, возможность определяется физической, принципиальной осуществимостью отказа, а допустимость принятой организацией функционирования. В конечном счете при анализе устойчивости нас могут интересовать допустимые (сохраняющие работоспособность системы) и недопустимые (выводящие систему в область неработоспособности) последовательности отказов.

Предварительные замечания:

1) В исходном состоянии (без запроса) и в установившемся состоянии (после срабатывания) переключатели абсолютно надежны.

2) pi - вероятность безотказной работы i -го элемента, qi=l-pi

3) βj - вероятность безотказной работы "переключателя", αj=1-βj.

Основные положения метода проиллюстрируем на следующих примерах.

а) Рассмотрим систему, состоящую из п = I элемента.

Вероятность безотказной работы системы: Рс=р

Вероятность отказа: Qc=l-p.

б) Для системы из n=2 равнонадежных элементов, безотказность будет определяться как сумма вероятностей работоспособных состояний при допустимых последовательностях отказов элементов и соответствующей организации срабатывания переключателей:

$$Ps,=P^2+P\beta(1-P)+P(1-P)=P[1+P(1-P)]$$

а вероятность отказа - определяется как сумма вероятностей состояний отказа:

$$Qs= (1/2)(1-P)^2\beta+ (1/2)(1-P)^2\beta+2[(1/2)(1-P)^2(1-\beta)]+P(1-P)(1-\beta) =$$

$$(1-P)^2+(1-\beta)(1-P)^2+P(l-P)(l-\beta)= (1-P)^2\beta+(1-P)(1-\beta)=(1-P)[(1-P)\beta+(1-\beta)]$$

в) Для системы из n=3 элементов рассмотрим (в силу громоздкости обшей граф-схемы) только допустимые последовательности отказов элементов.

$$Ps=P^3 +P^2\beta-P^3\beta+1/2\ P\beta^2-P^2\beta^2+1/2P^3\beta^2+1/2P\beta-P^2\beta+1/2P^3\beta-1/2P^2\beta+P^2\beta^2-1/2P^3\beta^2+P^2\beta-$$
$$-P^2\beta^2-P^3\beta+P^3\beta^2+2P^{2-}2P^3+3/2P\beta-3P^2\ \beta+3/2P^3\beta+P-2P^2+P^3=2P\beta-2P^2\beta-P^2\beta^2+P^3\beta^2+P$$

Правильность рассуждений подтверждается совпадением с результатами, приведенными в [2], определяемыми по формулам:

$$Qc=q[\beta q+\alpha]^{n-1}=(1-p)[\beta(1-p)+(1-\beta)]^{n-1}=(1-P)(1-P\ \beta)^{n-1}$$
$$Rc=1- Qc=1-(1-p)\ (1-P\ \beta)^{n-1}$$

Однако, в отличие от приведенных формул, предложенный метод является универсальным по отношению к структуре и принятой организации срабатывания переключателей.

Учитывая то, что реальные системы, в общем случае, не сводятся к равнопараметрическим, актуальной становится задача разработки общего метода.

Предварительные замечания:

1) Отказы элементов системы являются стохастически независимыми событиями.

2) Время безотказной работы каждого элемента распределено по экспоненциальному закону с параметром интенсивности отказов $\lambda_{I.}$

3) В исходный момент времени все элементы системы работоспособны (система в состоянии - "исправна".

4) Отказавшие элементы не восстанавливаются.

Рассмотрим граф возможных последовательностей для системы из n=4 элементов. Граф представляет собой модель переходов состояний. Процесс ее функционирования описывается системой N=65 дифференциальных уравнений.

Причем: $\sum_{i=0}^{Sn}$ Pi(t)=1. Начальные условия: Po(0)=1 ; Pi(0)=...=Ps (0)=0

На случай произвольного счетного n и $0\leq m \leq n$, получим следующее выражение, связывающее заданную последовательность отказов с вероятностью нахождения системы в состоянии, в которое она попадает при реализации данной последовательности:

$$P^m{}_n(S)=\prod_{k=0}^{m}\lambda ik/(\prod_{j=1}^{m+1}(S+\sum_{\nu=j}^{n+1}\lambda i\nu))$$

где λio=1, λin+1=0, а k(ν) определяют элемент, занимающий соответствующую позицию в заданной последовательности отказов.

$$P_n^{(m)}=\prod_{k=0}^{m}\lambda\, ik\left[\ \sum_{j=1}^{m+1}\frac{\prod_{d=j}^{n+1}pi}{\prod_{\nu=1}^{m+1}\frac{1,npu\,\nu=j}{\sum_{m}^{n+1}\lambda im-\sum_{\beta=j}^{n+1}\lambda i\beta,npu\,\nu\neq j}}\ \right]$$

Имея в виду, что $P(t)=e^{-\lambda t}$, окончательно получаем:

$$P_n^{(m)}=\prod_{k=0}^{m}\lambda\, ik\left[\ \sum_{j=1}^{m+1}\frac{e^{-\sum_{d=j}^{n+1}\lambda ij}}{\prod_{\nu=1}^{m+1}\frac{1,npu\,\nu=j}{\sum_{m}^{n+1}\lambda im-\sum_{\beta=j}^{n+1}\lambda i\beta,npu\,\nu\neq j}}\ \right]$$

Для частного случая равнонадежных элементов $\lambda_I=\lambda$, получаем:

$$Pm=\lambda^0\lambda^m\sum_{j=1}^{m+1}\frac{P^{n+1-j}}{\prod_{\nu=1}^{m+1}\frac{1,npu\,\nu=j}{\lambda(j-\nu),npu\,\nu\neq j}}=P^{\,n-m}\sum_{j=1}^{m}P^{m-j}\ \frac{1}{(-1)^{(m-j)}\,j!(m-n)!}=$$

$$=P^{\,n-m}\ \sum_{i=0}^{m}\ P^{i}\ \frac{1}{(-1)^{(m-j)}\,j(m-j)}=\frac{1}{m!}P^{\,n-m}(1-P)^m=\frac{1}{m!}P^{\,n-m}q^m$$

Что совпадает с ранее полученной частной характеристикой графа последовательностей и подтверждает правильность приведенных рассуждений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ю. Райншке, И.А. Ушаков. Оценка надежности систем с использованием графов.- М: Радио и связь, 1988г.
2. Гнеденко Б.В. и др. Надежность и эффективность в технике. Справочник . Т.2 - М.: Машиностроение, 1987г.
3.Можаев А.С. Учет временной последовательности отказов элементов в логико-вероятностных моделях надежности систем. В кн. Надежность систем энергетики. (Межвузовский сборник). - Новочеркасск. НПИ, 1990г.