КОММЕНТАРИИ К ПЕРЕИЗДАНИЮ РАБОТЫ П.С.ПОРЕЦКОГО «РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ»

НОЗИК А.А., СТРУКОВ А.В.
АО "СПИК СЗМА", Санкт-Петербург. E-mail:info@szma.com

Аннотация. В статье проведен анализ взглядов великого русского логика П.С.Порецкого на связь алгебры, математической логики и вероятности И если в трудах Дж.Буля и его учеников сходство математической логики и алгебры слишком преувеличено, а связь с теорией вероятностей скорее загадочна, чем очевидна, то в работах П.С.Порецкого эти вопросы получили строгое математическое описание. Несмотря на критику работ Дж.Буля и его учеников, П.С.Порецкий тонко подмечает и заслуги Дж.Буля в доказательстве возможности разложения логической функции по многим переменным, использовании правил сокращенного умножения. Приведены примеры «перехода» по правилу Порецкого от логической функции к вероятностной.

Ключевые слова: математическая логика, теория вероятностей, логико-вероятностный метод, ортогональная дизъюнктивная нормальная форма, функция алгебры логики, вероятностная функция.

Введение

Планируемое к концу 2015г. переиздание работы П.С.Порецкого «Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики» [1] является значимым событием в современной российской науке. Во-первых, это несомненно выдающаяся работа, которая, по мнению С.А.Яновской, вместе с другими работами русского логика, астронома и математика П.С.Порецкого является венцом периода истории математической логики, связанного с именами А. де Моргана, Дж.Буля, С.Джевонса, Ч.Пирса, Э.Шредера. Во-вторых, по-настоящему великие научные работы способны дать новый толчок в современных исследованиях при условии их непосредственного изучения в полном, авторском изложении, а не по цитатам и ссылкам. А для такого изучения немаловажна доступность материала, что и обеспечивается переизданием работы П.С.Порецкого на страницах авторитетного научного журнала Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН «Труды СПИИРАН».

У самого П.С.Порецкого интерес к математической логике возник именно по той причине, что профессор Казанского университета Васильев А.В. «…предоставил возможность… иметь в своем распоряжении весьма редкое сочинение Буля (первого автора по математической логике)…» [2]. Исследователи научного наследия П.С.Порецкого, раскрывая его заслуги в развитии математической логики на рубеже XIX-XX вв., отмечали не только тот факт, что Платон Сергеевич Порецкий является первооткрывателем в России «…принципиального для судеб развития современной математики…» направления [5]. Важно то, что это наследие и в наши дни «… продолжает оказывать стимулирующее влияние на развитие алгебраической теории логики…» [6]. На наш взгляд, переиздание работы П.С.Порецкого поможет глубже понять также и ту область исследований ученого, в которой выясняется взаимоотношение ЛОГИКИ и ВЕРОЯТНОСТИ. Ведь уже в самом названии «… капитального сочинения по математической логике…» [1] Дж.Буля эти два слова стоят рядом.

П.С.Порецкий не сразу пришел к ясному и полному пониманию связи логики и вероятности, «…возможности приложения учения о качественных символах (логических классах) к учению о символах количественных (вероятностных)…» [1]. Основы этого понимания заложены в предыдущей большой работе П.С.Порецкого [2], краткие комментарии к которой и составляют основу данной статьи.

1. П.С.Порецкий и Дж.Буль: об отношении математической логики к математике, логике и теории вероятностей.

Широко известное высказывание П.С.Порецкого о том, что «…Математическая логика по предмету своему есть логика, а по методу математика…», помещенное в начало предисловия «Об отношении математической логики к математике и логике», снабжено комментарием, в котором говорится, что Дж.Буль обрабатывает методами математической логики, «…кроме теории умозаключений, еще следующие теории: 1) теорию вероятностей, 2) теорию статистических отношений и 3) теорию отношений причин к следствиям» [1]. П.С.Порецкий отмечает, что и последователи Дж.Буля С.Джевонс и Э.Шредер также считали возможными и другие, кроме теории умозаключений, применения начал математической логики. Но в 1884 году П.С.Порецкий еще не был готов высказать свое мнение относительно предмета математической логики. Это время настало почти через три года. А в работе 1884 года, подводя итоги рассуждений об аналогии алгебраических и логических операций, П.С.Порецкий приводит замечательную таблицу и комментарии к ней: «…мы можем резюмировать результаты сопоставления основных операций логики и алгебры в следующей таблице:

в логике:	в алгебре:
a?b=b?a	a+b=b+a
ab=ba	ab=ba
(a?b)c=ac?bc	(a+b)c=ac+bc
a?0=a	a+0=a
a1=a	a·1=a

Отсюда мы вправе сделать следующее заключение. В логике операция, означаемая знаком ?, должна быть подчинена всем правилам алгебраического сложения; другая же операция, знак которой состоит в неупотреблении никакого знака, должна быть подчинена законам алгебраического умножения с тем непременным условием, чтобы символ *1* означал весь мир качественных форм» [2].

В 1886г. П.С.Порецкий в сообщении, читанном 25 октября на 60-м заседании секции физико-математических наук Общества Естествоиспытателей при Императорском Казанском университете, высказывает свое мнение о попытке Дж.Буля решить общую задачу теории вероятностей методами математической логики [2].

То, что у Дж.Буля стояла именно эта задача, можно понять из самого названия работы: «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логии и вероятностей». Кроме того, следует обратить внимание и на формулировку общей задачей теории вероятностей у Дж.Буля, данное им в п.14 Главы I, описывающей замысел работы. Если в п.1 Главы I говорится в общем виде о том, что замыслом работы является создание на базисе логики метода для применения в математической теории вероятностей, то в п.14 основная задача теории вероятностей формулируется конкретно: «Теперь мы можем приступить к решению основной задачи теории Вероятностей, а именно: Даны вероятности любых простых событий: требуется найти вероятность заданного сложного события, т.е. события, сформированного заданным способом из заданных простых событий. Задача также может быть решена в том случае, если сложное событие, вероятность которого ищется, описывается заданными условиями, т.е. условия также зависят от заданного условия, накладываемого на простые события» [3, с.10].

Если сравнить приведенную выше формулировку Дж.Буля, то она практически совпадает по смыслу с формулировкой задачи у П.С.Порецкого: «…определить вероятность сложного события, зависящего от данных простых событий, с помощью вероятностей всех или нескольких (произвольно избранных) из этих простых событий, а также вероятностей некоторых других сложных событий, предполагая, что данные события подчинены произвольному числу каких-либо то ни было условий» [2].

Такого же мнения придерживается известный исследователь работ Дж.Буля Т. Гальперин (Th.Gailperin): «... идея Дж.Буля о вероятности, возможно, лучше всего описана при обсуждении общей задачи теории вероятностей. Задача состоит в следующем: для любого ряда логических условий, описывающих события (высказывания), чьи соответствующие вероятности заданы, определить вероятность любого другого события в терминах этих вероятностей» [4]. В указанной работе Т. Гальперин объясняет, в чем состоит основа «необычной теории логики и вероятности» Дж.Буля: «Так как он рассматривал дизъюнктные логические суммы, то для вычисления вероятности он мог использовать логическую функцию, аргументами которой являются события, которые являются аргументами в алгебраической вероятностной функции этих же событий при условии их стохастической независимости…» [4].

Т.Гальперин, в частности, отмечает, что «Булевская вероятностная логика» (такова терминология автора) стала базисом для анализа отказов в цифровых схемах при оценке вероятности появления сигнала на выходе схемы при случайных колебаниях входного сигнала.

Автор ссылается на работу K.P.Parker, E.J.McCluskey «Анализ логических схем с неисправностями с использованием вероятностей входных сигналов» (1975), где сделано предположение, что Дж.Буль мог использовать следующее преобразование:

логическая функция $C_1 \vee C_2 \vee C_3 ...$ может быть представлена в виде $C_1 + \overline{C}_1 C_2 + \overline{C}_1 \overline{C}_2 C_3 + ...$, где знак + используется для обозначения взаимной несовместности (mutually exclusiveness) термов.

Причем Дж.Буль предполагал использование такого преобразования, но как таковая задача «*приспособления*» методов алгебры к «изучению качественных форм» у него не стояла, или , возможно Дж.Буль эту операция производил в уме.

Но именно на этой задаче «*приспособления*» и сосредоточил свое внимание П.С.Порецкий в работе 1887 [1].

2. Примеры логико-вероятностного анализа

Несмотря на острую критику отдельных положений «капитальной» работы Дж.Буля, П.С.Порецкий отмечает и ряд замечательных достижений основателя алгебры логики. В частности, то, что Дж.Буль «…установил следующее важное предложение $f(a) = af(1) + a_1 f(0)$ *...»,* или в современных обозначениях $f(a) = af(1) + \overline{a} f(0)$, где символ функции $f(a)$ «… представляет результат известной последовательности логических операций (сложения, умножения и отрицания)…» над классом *a*.

Таким образом, здесь вслед за Дж.Булем описан алгоритм, получивший современное название «разложение Шеннона», также широко используемый в задачах надежности под названием «алгоритм разрезания».

Заметим, что именно это разложение, впервые введенное именно Дж.Булем, позволяет получить важное тождество для логической функции $f(a,b)$ в современном виде*:*

$$a + b = af(1,b) + \overline{a} f(0,b) = a + \overline{a} b .$$

В работе [1] доказательство этого тождества выглядит следующим образом:

$$a + b = (\mathrm{ab} + \mathrm{ab}_1) + (ab + a_1 b) = ab + ab_1 + a_1 b = a + a_1 b \quad \text{или} \quad b + b_1 a .$$

П.С.Порецкий замечает, что «… в формулах Буля всякая сумма *A*+*B*+*C*+*D всегда состоит из дизъюнктных членов*» [1], а при необходимости сложения двух классов *p* и *q* Дж.Буль «мысленно» делает их дизъюнктными «… и получает или сумму $p + p_1 q$ (т.е. по его обозначениям, собственно $p + (1 - p)q$), или же сумму $q + q_1 p$ ».

В современных обозначениях такой алгоритм ортогонализации записывается следующим образом: $p + q = p + \overline{p} q = q + \overline{q} p$.

С точки зрения решения общей задачи теории вероятностей операция ортогонализации (или по терминологии П.С.Порецкого «приведение логического многочлена к дисъюнктному виду») позволяет корректно использовать теорему о вероятности суммы несовместных событий.

В работах Дж.Буля вопрос о *приспособлении* алгебраических методов к предметам логики решался не явно, можно сказать загадочно, и разгадку этого как раз и предложил П.С.Порецкий в работе 1887 года [2].

П.С.Порецкий также отмечает заслугу Дж.Буля в изложении основных правил логики, сформулировав правило сокращенного умножения, выраженное формулой (*P*+*Q*)(*P*+*R*)=*P*+*QR*, которое «… позволяет очень часто миновать необходимость перемножения каждого члена множимого с каждым членом множителя» [2].

Пример 1.

По аналогии с этим правилом сокращенного умножения Дж,Буля можно составить правила сокращенного умножения для промежуточных операций ортогонализации логических функций. Пусть, например, используется рациональный способ записи функции алгебры логики (ФАЛ) в виде логических матриц, предложенный Г.Ф.Супруном и применяемый затем в задачах анализа надежности структурно-сложных систем профессором И.А.Рябининым, начиная с монографии 1967 г. [7]. Здесь речь может идти о правилах сокращенного умножения отрицаний конъюнкций. Рассмотрим пример использования некоторых правил сокращенного умножения отрицаний конъюнкций на примере ортогонализации ФАЛ работоспособности мостиковой схемы [9]. В частности покажем применение двух правил сокращенного умножения для инверсных конъюнкций: $\overline{AB}\cdot A=\overline{B}\cdot A$, $\overline{AB}\cdot\overline{CB}=\overline{B}\vee B\overline{AC}$.

Пусть ФАЛ работоспособности мостиковой схемы записана в виде матрицы:

$$Y_{c1}=\begin{vmatrix} K_1 \\ \overline{K_1}K_2 \\ \overline{K_1}\,\overline{K_2}K_3 \\ \overline{K_1}\,\overline{K_2}\,\overline{K_3}K_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1x_3 \\ \overline{x_1x_3}x_2x_4 \\ \overline{x_1x_3}\;\overline{x_2x_4}\;x_1x_5x_4 \\ \overline{x_1x_3}\;\overline{x_2x_4}\;\overline{x_1x_5x_4}\;x_2x_5x_3 \end{vmatrix}.$$

Раскроем отрицание конъюнкции K_1 сразу в ортогональной форме по правилу Порецкого, то есть $\overline{x_1x_3}=\bar{x}_1\vee x_1\bar{x}_3$.

Третья строчка матрицы согласно первому правилу перемножения отрицаний конъюнкций преобразуется следующим образом:

$$\overline{x_1x_3}\;\overline{x_2x_4}\;x_1x_5x_4=\overline{\cancel{x_1}x_3}\;\overline{x_2\cancel{x_4}}\;x_1x_5x_4=\overline{x_3}\;\overline{x_2}\;x_1x_5x_4.$$

Символом $\cancel{x_i}$ обозначено сокращение логической переменной x_i.

Четвертая строка матрицы согласно первому и второму правилам перемножения отрицаний конъюнкций, а также правилу поглощения преобразуется следующим образом:

$$\overline{x_1x_3}\;\overline{x_2x_4}\;\overline{x_1x_5x_4}\;x_2x_5x_3=\overline{x_1\cancel{x_3}}\;\overline{\cancel{x_2}x_4}\;\overline{x_1\cancel{x_5}x_4}\;x_2x_5x_3=\overline{x_1}\;\overline{x_4}\;\overline{x_1x_4}\;x_2x_5x_3=\overline{x_1}\;\overline{x_4}\;\;x_2x_5x_3.$$

С учетом приведенных преобразований ФАЛ работоспособности мостиковой схемы будет приведена к «дисъюнктному виду»:

$$Y_{c1}=\begin{vmatrix} x_1x_3 \\ (\bar{x}_1\vee x_1\bar{x}_3)x_2x_4 \\ \overline{x_3}\;\overline{x_2}\;x_1x_5x_4 \\ \overline{x_1}\;\overline{x_4}\;\;x_2x_5x_3 \end{vmatrix}.$$

Теперь применим к полученной матрице правило логико-вероятностного метода расчета надежности «…с количественной стороны» [8] и заменим соответствующие логические переменные и их отрицания на вероятности безотказной работы Pi и вероятности отказ Qi , а логические операции - на алгебраические. Тогда вероятность безотказной работы мостиковой схемы P_b выражается следующей формулой:

$$P_b=P_1\,P_3+(Q_1+P_1\,Q_3)\,P_2\,P_4+Q_3\,Q_2\,P_1\,P_5\,P_4+Q_1\,Q_4\,P_2\,P_5\,P_3.$$

Пример 2.

Ценность научной статьи часто определяется наличием в ней задач, доведенных до окончательного решения и позволяющих решить задачу другим известным способом. В этом плане интересно решение задачи №1 [1, §] в современной интерпретации метода самого П.С.Порецкого

Дано: $P(x+y)=p$, $P(\bar{x}+\bar{y})=q$,

Найти: $P\,(x\bar{y}+\bar{x}y)=?$

1. Учитывая независимость событий x и y проведем по правилу Порецкого ортогонализацию сначала первой дизъюнкции

$$x+y=x+\bar{x}y\,, \qquad (1)$$

затем второй дизъюнкции

$$\bar{x}+\bar{y}=\bar{x}+x\bar{y}\,. \qquad (2)$$

2. Запишем вероятностные ортогональных ДНФ (1) и (2):

$$P(x+y)=P(x+\bar{x}y)=P(x)+P(\bar{x}y)=p\,, \qquad (3)$$

$$(\bar{x}+\bar{y})=P(\bar{x}+x\bar{y})=P(\bar{x})+P(x\bar{y})=q. \qquad (4)$$

3. Запишем уравнения (3) и (4) в виде системы *алгебраических* уравнений:

$$\begin{cases} P(x) + P(\bar{x}y) = p \\ P(\bar{x}) + P(x\bar{y}) = q \end{cases}. \quad (5)$$

Решим систему алгебраических уравнений (5) сложив левые и правые части уравнений:

$$P(x)+P(\bar{x}y)+ P(\bar{x})+P(x\bar{y})= p+ q. \quad (6)$$

Учитывая, что $P(x)+P(\bar{x})=1$, получаем

$$1+P(\bar{x}y)+P(x\bar{y})= p+ q. \quad (7)$$

И окончательно имеем: $P(\bar{x}y)+P(x\bar{y})= p+q -1$.

Ч.т.д.

Пример 3.

При обсуждении термина «вероятностная логика» [9] профессор Б.А.Кулик обратил внимание, что решение задачи Н.Нильссона [10], относящуюся к задачам алгебры логики (а не алгебры первого порядка), можно найти, использую логико-вероятностный метод. Ниже приводим наше решение задачи Н.Нильссона в обозначениях Б.А.Кулика.

Дано: $p(A)=p_1$; $p(A \supset B)=p_2$.

Найти: $P(B) =?$

1. Импликация $A \supset B$ как булева функция есть сокращенная запись выражения ДНФ $(\bar{A} \vee B)$ может быть по правилу Порецкого преобразована в ортогональную ДНФ (ОДНФ). Тогда

$$(\bar{A} \vee B) = (\bar{A} \vee AB). \quad (8)$$

Вероятностный многочлен, соответствующий ОДНФ (8) имеет вид:

$$P(\bar{A} \vee B) = P(\bar{A} \vee AB) = P(\bar{A}) + P(AB) = p_2. \quad (9)$$

Учитывая независимость событий (логических переменных A и B и обозначение $p(A)=p_1$ перепишем (9) в следующем виде:

$$P(\bar{A}) + P(AB) = P(\bar{A}) + P(A)P(B) = 1 - P(A) + P(A)P(B) = 1 - p_1 + p_1P(B) = p_2. \quad (10)$$

Из (10) получаем

$$P(B) = \frac{p_2 - (1 - p_1)}{p_1} = \frac{p_2 + p_1 - 1}{p_1}. \quad (11)$$

Формула (11) получена с использованием ЛВМ и совпадает с формулой, полученной с использованием алгебры кортежей Б.А.Куликом в 2007г.

Заключение

В предисловии к переизданию работы великого русского математика П.С.Порецкого [8] приводились слова профессоров Радомира С.Станковича и Яакка Т.Астола о важности переиздания работ, в которых впервые были введены некоторые важные понятия, термины, методы и алгоритмы. Некоторые издательства, например, издательство Dover Publications переиздавало работы Дж.Буля, С.Джевонса, Э.Шредера. Издательство ЛКИ в 2007г. в серии «Из наследства мировой философской мысли: философия науки» выпустила репринт работ А.Пуанкаре и Л.Кутюра под общим названием «Математика и логика». Интернет-ресурс bookfi.org содержит репринт книги Л.Кутюра «Алгебра логики», изданной в 1909г. в Одессе на русском языке и написанной во многом на основе работ П.С.Порецкого.

По всей видимости, существуют немало незаслуженно забытых трудов наших предшественников, достойных переиздания. Слова известного советского математика С.А.Яновской о работах П.С.Порецкого были сказаны во времена, когда идеи о применении (математической) логики в технике подвергались в отечественной марксисткой философии резкой критике. Тем не менее, идеи о применении математической логики в технике находили практическое воплощение в трудах советских и иностранных ученых. Ниже приводится таблица, в которой предпринята попытка расположить на временной оси развитие идеи о применении математической логике в технике.

Год	Ученые	Направление и результаты исследований
1847	А. де Морган	Основы алгебры логики.
1854	Дж.Буль	Операции с дисъюнктными суммами. Разложение логических функций.

		Математическая логика и вероятность.
1887	П.С.Порецкий	Преобразование логической функции к дисъюнктной форме
1909	Л.Кутюра, П.Эренфест	Изложение методов П.С.Порецкого в книге «Алгебра логики». Применение математической логики в технике
1923	Н.М.Герсеванов	Применение математической логики к расчету сооружений
1937	К.Шеннон, В.И.Шестаков, А.Накашима	Логическая теория релейно-контактных схем
1963	Ю.В.Мерекин, Макаров С.В.	Применение логико-вероятностного метода для расчета вероятности сбоя однотактных схем
1967	И.А.Рябинин	Применение логико-вероятностного метода для анализа надежности судовых электроэнергетических систем
1973	L.Fratta, U.G.Montanari	Применение логико-вероятностного метода для анализа надежности сети ARPA
1979	J.A.Abraham	Разработка быстродействующего алгоритма ортогонализации
1989	K.D.Heidtmann	Усовершенствование SDP-алгоритма J.A.Abraham (алгоритм KDH88).
2007	Можаев А.С.	Аттестация в Ростехнадзоре программного комплекса АРБИТР автоматизированного структурно-логического моделирования надежности и безопасности структурно-сложных систем
2009	R.S. Stanković, J. Astola	Репринт и перевод на английский язык работы П.С.Порецкого (1887г) в серии «Early Days of Information Sciences», Технологический университет, г.Тампере, Финляндия.
2015	П.С.Порецкий	Переиздание работы П.С.Порецкого (1887г.) в сборнике «Труды СПИИРАН», С.Петербург, Россия (план)

Естественно, что и со стороны специалистов по истории и философии науки, и со стороны математиков и инженеров могут быть высказаны пожелания расширить и уточнить эту таблицу. На наш взгляд, как раз одной из задач научной школы МАБР и может быть обсуждение этого вопроса, потому что на примерах наших и зарубежных великих ученых и будет развиваться российская наука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики // Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1884/ Т. 2. – XXIV. 170 С. (отдельный оттиск).
2. Порецкий П.С. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики// Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, Казань, 1887, Т.5, - С.83-116.
3. Boole George. An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, London, 1854.
4. Hailperin Th. Boole’s Logic and probability. A critical exposition from standpoint of contemporary algebra, logic and probability theory. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo. 1986, 400 pp.
5. Бажанов В.А. П.С. Порецкий. Жизнь и научная деятельность пионера исследований в области математической логики в России// Вопросы история естествознания и техники. 2005. №4. С.64-73.
6. Стяжкин Н.И.Формирование математической логики. М.: «Наука» , 1967, 508с.
7. И.А.Рябинин Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. Л.: Судостроение, 1967, 362с.
8. И.А.Рябинин, А.В.Струков. Предисловие и вступительная статья к переизданию работы П.С.Порецкого «Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики»// Труды СПИИРАН (в печати).
9. Nilsson N.J. Probabilistic Logic// “Artificial Intelligence”, vol.28 (1986). Elsevier Science Publ. North Holland, pp. 31-56.
10. Кулик Б.А. Феномен логико-вероятностного исчисления// Труды международной научной школы «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах» (МА БР-2009), СПб, 2009, с. 111-116.