

Вероятностная логика и логика вероятностей

И.А.РЯБИНИН

Аннотация. Утверждается, что вероятностная логика и логика вероятностей это не синонимы, а принципиально разные понятия. Выдающееся открытие связи математической логики с теорией вероятностей (в логике вероятностей) в форме ортогонализации функций алгебры логики было осуществлено в 1886 году великим русским логиком Порецким Платоном Сергеевичем в его сообщении «Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики».

Приводится информация о представителях Новосибирской научной школы, которые интерпретируют теорию нейронных полей и вероятностную динамическую логику в логико-вероятностных терминах. Для уяснения сущности логики вероятностей рассмотрен пример вычисления вероятности функции структурно-сложной системы.

Высказано удивление, что за последние 1.5 века ни один крупный математик так и не высказался по вопросу связи математической логики с теорией вероятностей.

Ключевые слова: Вероятностная логика, логика вероятностей, ортогонализация функций алгебры логики, вероятностная динамическая логика.

Выяснение аналогии между математической логикой и теорией вероятностей имеет как теоретический, так и практический интерес. Проблематика связи логики с вероятностью начала развиваться в древности Аристотелем, затем Г.В.Лейбницем, Дж.Булем, У.С.Джевонсом, Дж.Венном, Р.Карнапом и другими. Не углубляясь в века, рассмотрим эту связь на уровне 19-20 веков, когда возникла математическая логика Буля и завершилось формирование современной теории вероятностей С.Н.Берштейном и А.Н.Колмогоровым.

Анализ взаимоотношений между вероятностью и логикой в междисциплинарном плане в наше время регулярно рассматривается на специальных семинарах в Великобритании.

Так на семинаре Огастеса де Моргана в королевском колледже, (Лондон 4-6 ноября 2002г.) обсуждались вопросы: - как вероятность относится к логике? – может ли объединяться вероятность и логика? – если да, то как? [1].

В специальном выпуске 3-го семинара в 2007 году анонсируется статья Колина Хаусана (Colin Howson) «Можно ли логику объединить с вероятностью?» [2]. В 2015 году (20-24 апреля) прошел 7-й семинар «Объединение вероятности и логики» в университете Кентберри [3].

Вероятностная логика возникла как непосредственное продолжение индуктивной логики. Значения истинности в вероятностной логике называются вероятностями истинности высказываний, степенями правдоподобия или подтверждения.

Логика вероятностей, в которой высказываниям приписываются исключительно значения истины и лжи как в двухзначной логике.

В настоящее время вероятностная логика находит наибольшее применение в развитии приложений к искусственному интеллекту [4], а логика вероятностей в середине 20 века нашла применение к решению проблем надежности, живучести и безопасности структурно-сложных систем [5,6].

Смысл слов «вероятностная логика (ВЛ)» и «логика вероятностей (ЛВ)» долгое время воспринимался как синонимы.

А сущность этих принципиально разных понятий состоит в следующем:

- предметом *вероятностной логики* Д.М. Кейнса (Keynes J.M.) [7], Дж. фон Неймана [8] и Нильса Нильссона (Nilsson N.J.) [4] является оценка истинности гипотез (высказываний), которые заключены в промежуток между «истиной» и «ложью» ($1 \geq x \geq 0$);

- предметом *логики вероятностей* Джорджа Буля [9], П.С.Порецкого [10], Рябинина И.А. [5,6] является вычисление вероятности истинности случайных событий (высказываний), принимающих только два значения (1;0).

В первом случае имеют дело с многозначной логикой, во втором – с двухзначной логикой.

Теории логики, допускающие более чем две категории «истинных» и «ложных» высказываний, составляют то, что обычно называют «модальной» логикой, а допускаемые ими

категории - «модусами» или «степенями правдоподобия». Модальная логика оперирует такими истинностными понятиями, как «возможно», «необходимо» и т.д.

Необходимость применения в логике вероятностных методов диктовалась прогрессом развития самой математической логики и теоретической информатики.

Диссертация Сперанского С.О. «Логика вероятностей и вероятностная логика» [11] посвящена изучению математической стороны обоих этих подходов. По утверждению Сперанского С.О.:

- цель вероятностной логики – введение в рассмотрение и дальнейшее изучение разнообразных языков для рассуждений о вероятностях.

- логика вероятностей ставит во главу угла проблему индуктивного синтеза непротиворечивых теорий.

Первооткрывателем логико-вероятностного анализа (Дж.Буля и П.С.Порецкого) в связи с отождествлением ЛВ и ВЛ практически все ученые считали их сторонниками именно вероятностной логики, а не логики вероятностей.

Опуская анализ вероятностной логики, широко представленной в научной литературе и Интернете, рассмотрим специфику логики вероятностей, известной единицам ученых, и феномен ее замалчивания математиками.

Выдающееся открытие связи математической логики с теорией вероятностей было осуществлено в 1886 году великим русским логиком Порецким Платоном Сергеевичем (3.10.1846-9.08.1907) в его сообщении «Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики» [10].

Там он строго математически показал возможность приспособления качественных форм логики (логических классов) к учению о символах количественных (вероятностях) с помощью ортогонализации функций алгебры логики (ФАЛ). Первое определение логико-вероятностного анализа (ЛВА) сформулировано автором следующими словами: ...«Отсюда открывается обобщенный путь для определения вероятностей: найти логическую связь между событиями, которого вероятность ищется, и другими событиями, вероятности которых даны, а затем сделать **переход** от логического равенства между событиями к алгебраическому равенству между их вероятностями».

Изюминка этого определения кроется в выделенном автором слове «переход». Отсюда начинается описание главного результата автора. Для возможности пользоваться правилом несовместности необходимо уметь каждый логический многочлен

$$A \vee B \vee C \vee D \vee \dots \quad (1)$$

приводить к *дисъюнктивному* (по современному – ортогональному) виду, т.е. к виду

$$A \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}D \vee \dots, \quad (2)$$

где \bar{A} есть отрицание A , \bar{B} - отрицание B и т.д.

Здесь я привел современные правила обозначения логических сумм \vee и отрицаний \bar{A} (у П.С.Порецкого «+» и A_0 соответственно).

Оба многочлена логически равнозначны, но отличаются тем, что к первому из них не применима теорема о вероятности суммы несовместных событий, тогда как к второму применимо. Вероятность

$$P(A \vee B \vee C \vee D), \quad (3)$$

будучи приведена к *дисъюнктивному* виду, разбивается на сумму вероятностей

$$P(A) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}C) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}D). \quad (4)$$

Из теории вероятностей известно, если два и более события суть независимы, то вероятность их совпадения равна произведению их отдельных вероятностей. Это значит, что если $a, b, c \dots$ - суть простые события, не связанные между собою никакими логическими отношениями, то $P(abc\dots) = P(a)P(b)P(c)\dots$. Тогда (4) может записано в следующем виде:

$$P(A) + P(\bar{A})P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})P(D). \quad (5)$$

На стр.7 [10] в качестве примера представлен алгоритм ортогонализации для дизъюнкции $ab \vee cd$:

1) Проводится внешний цикл ортогонализации: $ab \vee cd = ab \vee \bar{a}bcd$;

- 2) Затем отрицание \overline{ab} по закону де Моргана преобразуется в дизъюнкцию двух отрицаний:
 $\overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$;
- 3) Проводится внутренний цикл ортогонализации: $\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a} \vee \overline{ab}$;
- 4) Объединяются все три операции:

$$ab \vee cd = ab \vee \overline{abcd} = ab \vee (\overline{a} \vee \overline{b})cd = ab \vee (\overline{a} \vee \overline{ab})cd = ab \vee \overline{acd} \vee \overline{abc}d . \quad (6)$$

Выражение (6) есть ортогональная дизъюнктивная нормальная форма (ОДНФ), которая позволяет вычислить вероятность $P(ab \vee cd) = P(ab) + P(\overline{acd}) + P(\overline{abc}d)$.

Таким образом, именно Порецкий П.С. в 1886 году открыл строгий математический метод вычисления вероятности сложного события через вероятности простых событий, т.е. метод, который в 1963 году получил название логико-вероятностного метода (ЛВМ) [12]. Вторичное независимое открытие алгоритма ортогонализации произошло в 1963 году в Институте математики (Новосибирск) в отделении Вычислительной техники специалистом по счетно-решающим приборам и устройствам Мерекиным Юрием Владимировичем. В это время задача о вероятности вычисления обращения в единицу булевой функции уже считалась тривиальным решением. Для решения прикладных задач применение совершенной нормальной дизъюнктивной формы (СДНФ) считалось нерациональным из-за большого числа дизъюнктивных членов. Возникла необходимость построения «короткой» ортогональной формы, которая и была получена в 1963 году [12].

Научная школа логико-вероятностного анализа, возникшая в Институте математики им.С.Л.Соболева СО РАН (Новосибирск), представлена рядом докторов и кандидатов физико-математических наук:

Витяев Е.Е. «Логико-вероятностные методы извлечения знаний из данных и компьютерное познание», Омск, 2006.

Одинцов С.П. «Конструктивные отрицания и паранепротиворечивость», Новосибирск, 2006.

Ступина А.В. «Построение логико-вероятностной модели прогнозирования систем размножения переменных», Новосибирск, 2006.

Демин А.В. «Логико-вероятностный метод извлечения знаний и его применение в задачах прогнозирования и управления», Новосибирск, 2008.

Сперанский С.О. «Логика вероятности и вероятностная логика», Новосибирск, 2013.

В журнале «Нейроинформатика», 2011, том 5, №1 [13] опубликована статья под названием «Вероятностная динамическая логика мышления» четырех авторов. Витяев Е.Е. и Сперанский С.О. представляют Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН, Перловский Л.И. – Гарвардский университет, исследовательскую лабораторию ВВС США, Ковалерчук Б.Я. – Центральный Вашингтонский университет (Элленсбург). Авторы интерпретируют теорию нейронных моделирующих полей и динамическую логику в логико-вероятностных терминах.

Привожу аннотацию этой статьи, близкой по духу к вероятностной логике и логике вероятностей нашей работы.

«...Аннотация. Одним из авторов статьи (Л.И. Перловским) разработан оригинальный подход к моделированию мышления, основанный на теории нейронных моделирующих полей и динамической логике. Этот подход основан на детальном анализе проблем моделирования мышления в искусственном интеллекте – недостаточности формальной логики и проблеме комбинаторной сложности. В данной работе мы интерпретируем теорию нейронных моделирующих полей и динамическую логику в логико-вероятностных терминах и показываем, как в этом случае формулируются и решаются проблемы моделирования мышления в искусственном интеллекте. Практическое применение разработанной вероятностной динамической логики иллюстрируется на примере моделирования экспертного правила принятия решений в диагностике рака груди....»

Чтобы практически осознать нестандартность вычисления вероятностей сложных ФАЛ и понять сущность логики вероятностей, я в статье «О связи математической логики с теорией вероятностей» [14] привел четыре примера.

В этих примерах конъюнкции записываются строками без знаков \wedge , $\&$, \cdot ; дизъюнкции набором параллельных строк без знаков \vee ; отрицания чертой над x_i . Такая матричная форма записи не только экономит бумагу, но и лучше раскрывает суть ортогонализации.

Приведем здесь только четвертый пример с функцией опасного состояния (ФОС) 4.26 из [6, с.93]. Стоит вопрос, как же следует вычислять вероятность (P) сложного события

$$P\{y(x_1, \dots, x_5) = 1\}, \quad (7)$$

если будут известны вероятности истинности простейших высказываний

$$P\{x_i = 1\} = R_i, \quad (8) \quad P\{x_i = 0\} = Q_i, \quad (9) ?$$

Какова логика их вероятностей?

Н.Руш в 1956 году [15] рекомендовал полный перебор всех возможных состояний системы путем записи ФАЛ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

$Y_{c4} = \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_4 \\ x_1 x_3 x_5 \\ x_2 x_4 x_3 \\ x_2 x_5 x_4 \end{vmatrix} .$	(10)
---	------

Результатом проведения внешнего цикла ортогонализации матрицы (10) будет матрица вида:

$Y_{c4} = \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_4 \\ x_1 x_3 x_4 x_1 x_3 x_5 \\ x_1 x_3 x_4 x_1 x_3 x_5 x_2 x_4 x_3 \\ x_1 x_3 x_4 x_1 x_3 x_5 x_2 x_4 x_3 x_2 x_5 x_4 \end{vmatrix} .$	(11)
---	------

После применения в (11) теоремы де Моргана и замены отрицаний конъюнкций на сумму отрицаний получим:

$Y_{c4} = \begin{vmatrix} x_1 x_3 x_4 \\ \bar{x}_1 x_3 x_4 \\ \bar{x}_3 x_1 x_3 x_5 \\ \bar{x}_4 x_1 x_3 x_4 \\ \bar{x}_1 \bar{x}_1 x_1 x_3 x_5 \\ \bar{x}_3 \bar{x}_3 x_2 x_4 x_3 \\ \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_2 x_4 x_3 \\ \bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2 x_5 x_4 \\ \bar{x}_3 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_2 x_5 x_4 \\ \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_3 x_2 x_5 x_4 \end{vmatrix} .$	(12)
---	------

Результатом проведения внутреннего цикла ортогонализации матрицы (12) будет матрица вида:

$Y_{c4} = \left \begin{array}{c c} x_1 x_3 x_4 & \\ \hline \bar{x}_1 & \\ \hline x_1 \bar{x}_3 & x_1 x_3 x_5 \\ \hline x_1 x_3 \bar{x}_4 & \\ \hline \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \\ \hline x_1 \bar{x}_3 & x_1 \bar{x}_3 & x_2 x_4 x_3 \\ \hline x_1 x_3 \bar{x}_4 & x_1 x_3 \bar{x}_5 & \\ \hline \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \\ \hline x_1 \bar{x}_3 & x_1 \bar{x}_3 & x_2 \bar{x}_4 & x_2 x_5 x_4 \\ \hline x_1 x_3 \bar{x}_4 & x_1 x_3 \bar{x}_5 & x_2 x_4 \bar{x}_3 & \end{array} \right $	$= \left \begin{array}{c c} x_1 x_3 x_4 & \\ \hline x_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 & \\ \hline \bar{x}_1 x_2 x_4 x_3 & \\ \hline \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_5 x_4 & \\ \hline x_1 x_2 \bar{x}_3 x_5 x_4 & \end{array} \right = \left \begin{array}{c c} x_1 x_3 x_4 & \\ \hline x_1 x_3 \bar{x}_4 x_5 & \\ \hline \bar{x}_1 x_2 x_4 x_3 & \\ \hline \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_5 x_4 & \end{array} \right .$	(13)
--	--	------

Используя вероятности (8,9) и ортогональную дизъюнктивную нормальную форму (ОДНФ) (13), вычислим вероятностную функцию.

ОДНФ (13) иллюстрирует именно логику вероятностей (8,9):

$P\{y_4(x_1, x_2, \dots, x_5) = 1\} = R_1 R_3 R_4 + R_1 R_3 Q_4 R_5 + Q_1 R_2 R_4 R_3 + R_2 Q_3 R_5 R_4.$	(14)
---	------

Вызывает законное удивление, что за последние 1.5 века ни один крупный математик так и не высказался по вопросу связи математической логики и теории вероятностей, что давало повод различным критикам говорить, что ни в одном из крупных трактатах по теории вероятностей *нет никакого упоминания о существовании какой-либо связи* этой научной дисциплины с алгеброй логики. Имелись ввиду монографии академиков А.А.Маркова, А.Н.Колмогорова и других.

Возникает вопрос: в чем заключается феномен логико-вероятностного анализа и его замалчивания математиками? Так в учебнике «Введение в математическую логику» [16] нет даже упоминания о Порецком П.С.

В учебнике [17] не сказано, что П.С.Порецкий являлся самым ярким представителем логической мысли не только Казанского университета, но всей России и мировой науки, что он достиг мировой известности и признания, что его работы существенно развили достижения Буля, Девонса и Шрёдера.

Дадим высокую оценку путей мышления автора в последней четверти 19 века, которые во второй половине 20 века привели к важным открытиям в области логико-вероятностного анализа [18,19].

10 августа 1907 года умер П.С.Порецкий, имя которого более известно за границей, чем на его родине, писал в некрологе профессор И.В.Слешинский – переводчик на русский язык книги Л.Кутюра «Алгебра логики».

Литература

1. URL: <http://www.kent.ac.uk/secl/philosophy/jw/2002/progic/> (Дата обращения 12.08.15)
2. URL: http://www.philos.rug.nl/~romeyn/paper/2009_progicnet_-_editorial_JAL.pdf Дата обращения 12.08.15)
3. URL: <http://www.kent.ac.uk/secl/philosophy/jw/2015/progic/> (Дата обращения 12.08.2015г.)
4. Nilsson N.J. Probabilistic Logic// “Artificial Intelligence”, vol.28 (1986). Elsevier Science Publ. North Holland, pp. 31-56.
5. Ryabinin I. reliability of engineering systems. Principles and Analysis // MIR Publieshers, Moscow, 1976. p.531.
6. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем.// Изд-во С.-Петербургского университета. 2007. 276 с.
7. Keynes J.M. Treatise on Probability. L-N.Y.:1921
8. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент//Сб. Автоматы/ М. : ИЛ. 1956. с.68-139.

9. Boole George. An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, London, 1854.
10. Порецкий П.С. Изложение основных начал математической логики в возможно более наглядной и общедоступной форме. Сообщение, читанное в 3 заседании секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете// Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете. Казань, 1881. Т.1. – С.2-31.
11. Сперанский С.О. Логика вероятности и вероятностная логика// Диссертация кф-мн, Новосибирск, 2013. 109с.
12. Мерекин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета одноконтурных схем методом ортогонализации // Вычислительные системы. 1963. Вып.4.
13. Витяев Е.Е., Перловский Л.И., Ковалерчук Б.Я., Сперанский С.О. Вероятностная динамическая логика мышления // Нейроинформатика, 2011, том 5, №1. с.1-20.
14. Рябинин И.А. О связи математической логики с теорией вероятностей// Ученые записки РГГМУ, СПб. №6, 2008. с.170-176.
15. Rouché N. Extension du formalisme f'algebre logique. (Руш Н. Расширение формализма алгебры логики на вероятности)//Revue H.F. 1956. 3 N5. p.179-182. франц.
16. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику// М.: Изд. Московского университета. 1982. 120 с.
17. Формальная логика. Учебник. Под ред.Чепухина И.Я., Бродского И.Н. // Издательство Ленинградского университета. Л. 1977. 357 с.
18. Рябинин И.А. Логико-вероятностный анализ проблем надежности и безопасности. // Saarbrücken, Deutschland, Palmarium, Academic Publishing, 2012, 263 p.
19. Igor A. Ryabinin. Logical probabilistic analysis and its history// Int. J. of Risk Assessment and Management, 2015. Vol.18, No.3/4, pp.256 – 265.