Рябинин И.А., Струков А.В.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СТРУКТУРНО-СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНЫМИ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Аннотация. На примере структурно-сложной системы Р.Барлоу и Ф.Прошана, которую они в 1969 году не смогли решить точно, представлено ее современное точное решение разными логико-вероятностными методами в следующей последовательности.

Сначала функция работоспособности из 10 кратчайших путей была разложена по правилу К.Шеннона на 8 ортогональных членов и, в соответствии с правилами схемно-логического метода, был получен вероятностный полином (8) точного решения этой задачи.

Затем для функции неработоспособности из 8 минимальных сечений отказов по методу П.С.Порецкого – Ю.В.Мерекина были выполнены последовательно (без всяких сокращений) все 7 произведений отрицаний конъюнкций на утвердительные конъюнкции и получено выражение (11.8), которое логически эквивалентно ФАЛ (10), но записано не в форме ДНФ, а в ОДНФ, позволяющей прямой переход к вероятностной функции (12).

Третьим методом стало решение ФРС с помощью программного комплекса АРБИТР, который выдал вероятностную функцию (15), состоящую из 17 одночленов.

Четвертый метод L.Fratta, U.Montanari [5] является, по нашей терминологии, методом ортогонализации П.С.Порецкого по одной логической переменной (SVI – single variable inversion), состоящий в поэтапном умножении конъюнкций, используя операции поглощения и сокращения на каждом этапе. Рассмотрен алгоритм оценки нижних и верхних границ показателя надежности.

Пятый метод J.A.Abraham [6] ортогонализацию осуществляет путем сравнения ведущей конъюнкции со всеми остальными конъюнкциями с помощью алгоритма «COMPARE».

Ключевые слова: Структурно-сложная система (ССС), форма перехода к полному замещению (ФППЗ), ортогональная дизъюнктивная нормальная форма (ОДНФ), Sum of Disjoint Products (SDP).

В работе [1] опубликованы первые поучительные примеры решения задач надежности структурно-сложных систем логико-вероятностными методами. Эти задачи формулировались для реальных систем из области судовых электроэнергетических систем и компьютерной сети ARPA. Но еще ранее 1971 года в книге знаменитых авторов Р.Барлоу и Ф.Прошана [2] была сформулирована пусть не реальная, но математически интересная задача (назовем ее “Пять треугольников»), которую они тогда не смогли решить точно. Покажем на примере точного решения этой задачи рядом логико-вероятностных методов, попутно демонстрируя эффективность именно схемно-логического метода [3], незаслуженно забытого специалистами ЛВМ.

В работе [2] авторы Р.Барлоу и Ф.Прошан привели список 10 кратчайших путей успешного функционирования (КПУФ) гипотетической двухполюсной сети (рис.1): 12, 156, 1476, 14896, 342, 3456, 376, 3752, 3896, 38952 и список 8 минимальных сечений отказов (МСО): 13, 1478, 1479, 1456, 2543, 2578, 2579, 26.

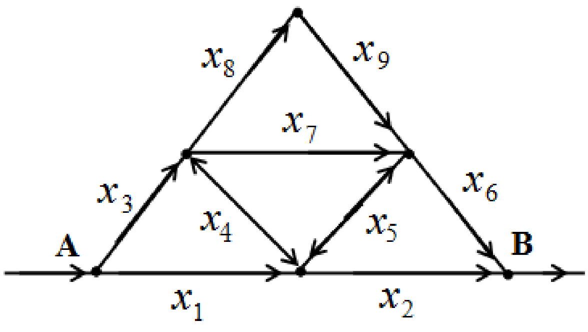

Рисунок 1 – Структурно-сложная система [2]

Формализуем задачу с помощью дизъюнкции КПУФ.

$$F=\left|\begin{array}{l} x_1x_2 \\ x_1x_5x_6 \\ x_3x_4x_2 \\ x_3x_7x_6 \\ x_1x_4x_7x_6 \\ x_3x_4x_5x_6 \\ x_3x_7x_5x_2 \\ x_3x_8x_9x_6 \\ x_1x_4x_8x_9x_6 \\ x_3x_9x_5x_2x_8 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l|l} x_1 & \begin{array}{l} x_2 \\ x_5x_6 \\ x_4x_6x_7 \\ x_4x_6x_8x_9 \end{array} \\ x_3 & \begin{array}{l} x_2x_4 \\ x_6x_7 \\ x_4x_5x_6 \\ x_2x_5x_7 \\ x_6x_8x_9 \\ x_2x_5x_8x_9 \end{array} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l|l} x_1 & \begin{array}{l|l} & x_2 \\ x_6 & \begin{array}{l} x_5 \\ x_4x_7 \\ x_4x_8x_9 \end{array} \end{array} \\ x_3 & \begin{array}{l|l} x_2 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_5x_7 \\ x_5x_8x_9 \end{array} \\ x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_4x_5 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \end{array}\right| \tag{1}$$

Успех прохождения информации из точки *A* в точку *B*, записанный формулой (1), есть не что иное как дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) с повторным вхождением ряда аргументов (x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 и др.).

При переходе к вероятностной функции (ВФ), т.е. для вычисления вероятности истинности функции алгебры логики (ФАЛ)

$$P\{F=1\}=f(R_1,R_2,...,R_9), \tag{2}$$

где

$$P\{x_i=1\}=R_1 \quad , \quad P\{x_1'=1\}=Q_1, \tag{3}$$

нельзя замещать аргументы x_i вероятностями (3) именно из-за их повторности.

Схемно-логический метод базируется на разложении Шеннона [3], который любую ФАЛ, зависящую от *n* аргументов ($n \geq 1$) можно представит в следующем виде:

$$f(X_1,X_2,...,X_n)=X_1 f(1,X_2,...,X_n)+X_1' f(0,X_2,...,X_n)., \tag{4}$$

Разложим ФАЛ (1) по аргументам $x_{1,}\, x_2, x_3$.

$$F=\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ 5 \\ \\ 6 \\ \\ 7 \\ 8 \end{array}\left|\begin{array}{l|l} x_1x_2x_3 & 1 \\ x_1x_2x_3' & 1 \\ x_1x_2'x_3 & \begin{array}{l|l} x_6 & \begin{array}{l} x_5 \\ x_4x_7 \\ x_4x_8x_9 \end{array} \\ x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_4x_5 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \\ x_1'x_2x_3 & \begin{array}{l|l} & x_4 \\ & x_5x_7 \\ & x_5x_8x_9 \\ x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_4x_5 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \\ x_1x_2'x_3' & \begin{array}{l|l} x_6 & \begin{array}{l} x_5 \\ x_4x_7 \\ x_4x_8x_9 \end{array} \end{array} \\ x_1'x_2'x_3 & \begin{array}{l|l} x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_4x_5 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \\ x_1'x_2x_3' & 0 \\ x_1'x_2'x_3' & 0 \end{array}\right|, \tag{5}$$

Из восьми ортогональных членов разложения в (5) первые два конъюнктируют с 1 (Истина), а последние два – с 0 (Ложью). В членах 3–6 все же остались повторяющиеся аргументы, которые требуют дополнительного разложения.

В третьем члене разложения, используя операцию поглощения (2.13) из [4], упростим

$x_5 \vee x_4 x_5 = x_5$, $\quad x_7 \vee x_4 x_7 = x_7$, $\; x_8 x_9 \vee x_4 x_8 x_9 = x_8 x_9$

и запишем его в виде $x_6 (x_5 \vee x_7 \vee x_8 x_9)$.

Дополнительное разложение в 3 ÷ 6 членах выражения (5) произведем по двум аргументам x_5 и x_6.

$$F = \begin{array}{r|l|}
1 & x_1x_2x_3\cdot 1 \\
2 & x_1x_2x_3'\cdot 1 \\
3 & \begin{array}{l|l} x_1x_2'x_3 & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5x_6' & 0 \end{array} \end{array} \\
4 & \begin{array}{l|l} x_1'x_2x_3 & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5x_6' & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5'x_6' & x_4 \end{array} \end{array} \\
5 & \begin{array}{l|l} x_1x_2'x_3' & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & 1 \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \end{array} \\
6 & \begin{array}{l|l} x_1'x_2'x_3 & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{|l|}
x_1x_2x_3\cdot 1 \\
x_1x_2x_3'\cdot 1 \\
\begin{array}{l|l} x_1x_2'x_3 & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \end{array} \\
\begin{array}{l|l} x_1'x_2x_3 & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5x_6' & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5'x_6' & x_4 \end{array} \end{array} \\
\begin{array}{l|l} x_1x_2'x_3' & \begin{array}{l|l} x_5x_6\cdot 1 & \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \end{array} \\
\begin{array}{l|l} x_1'x_2'x_3 & \begin{array}{l|l} x_5x_6 & \begin{array}{l} x_4 \\ x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \\ x_5'x_6 & \begin{array}{l} x_7 \\ x_8x_9 \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}. \qquad (6)$$

Применяя закон отрицания к отдельным слагаемым функции (6), получим

$$F = \begin{array}{|l|}
x_1x_2x_3 \\
x_1x_2x_3' \\
\begin{array}{l|l} x_1x_2'x_3 & \begin{array}{l} x_5x_6 \\ x_5'x_6\left[x_7'\left(x_8x_9\right)'\right]' \end{array} \end{array} \\
\begin{array}{l|l} x_1'x_2x_3 & \begin{array}{l} x_5x_6 \\ x_5'x_6\left[x_4'x_7'\left(x_8x_9\right)'\right]' \\ x_5x_6' \\ x_5'x_6'x_4 \end{array} \end{array} \\
\begin{array}{l|l} x_1x_2'x_3' & \begin{array}{l} x_5x_6 \\ x_5'x_6x_4\left[x_7'\left(x_8x_9\right)'\right]' \end{array} \end{array} \\
\begin{array}{l|l} x_1'x_2'x_3 & \begin{array}{l} x_5x_6\left[x_4'x_7'\left(x_8x_9\right)'\right]' \\ x_5'x_6\left[x_7'\left(x_8x_9\right)'\right]' \end{array} \end{array}
\end{array}. \qquad (7)$$

Выражение (7) является формой перехода к полному замещению (ФППЗ). Произведем замены x_i и x'_i их вероятностями.

$$\begin{aligned} P\{F=1\} &= R_1R_2R_3 + R_1R_2Q_3 + R_1Q_2R_3\left(R_5R_6 + Q_5R_6\left[1-Q_7\left(1-R_8R_9\right)\right]\right) + \\ &+ Q_1R_2R_3\left\{\left(R_5R_6 + Q_5R_6 + R_5Q_6\right)\left[1-Q_4Q_7\left(1-R_8R_9\right)\right] + Q_5Q_6R_4\right\} + \\ &+ R_1Q_2Q_3\left\{R_5R_6 + Q_5R_6R_4\left[1-Q_7\left(1-R_8R_9\right)\right]\right\} + \\ &+ Q_1Q_2R_3\left\{R_5R_6\left[1-Q_4Q_7\left(1-R_8R_9\right)\right] + Q_5R_6\left[1-Q_7\left(1-R_8R_9\right)\right]\right\} \end{aligned} . \quad (8)$$

При $R_i = Q_i = 0.5$ имеем

$$\begin{aligned} P\{F=1\} &= 0.125\{1+1+0.40625+0.734375+02.328125+0.359375\} = \\ &= 0.125*3.8281125 = 0.478515625 \end{aligned} . \quad (9)$$

Решим теперь эту задачу методом ортогонализации [4, с.112-116] по формулам П.С.Порецкого через минимальные сечения отказов (МСО), которых всего 8.

$$\bar{F} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \left| \begin{array}{l} x'_1x'_3 \\ x'_2x'_6 \\ x'_1x'_4x'_7x'_8 \\ x'_1x'_4x'_7x'_9 \\ x'_1x'_4x'_5x'_6 \\ x'_2x'_3x'_4x'_5 \\ x'_2x'_5x'_7x'_8 \\ x'_2x'_5x'_7x'_9 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ K_8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} K_1 \\ K'_1K_2 \\ K'_1K'_2K_3 \\ K'_1K'_2K'_3K_4 \\ K'_1K'_2K'_3K'_4K_5 \\ K'_1K'_2K'_3K'_4K'_5K_6 \\ K'_1K'_2K'_3K'_4K'_5K'_6K_7 \\ K'_1K'_2K'_3K'_4K'_5K'_6K'_7K_8 \end{array} \right| . \quad (10)$$

Произведем вычисления всех семи произведений K'_i по правилам де Моргана отрицаний элементарных конъюнкций и формулам П.С.Порецкого для внутренней ортогонализации.

$$K'_1 = \left(x'_1x'_3\right)' = \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_3 \end{array} \right| = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x'_1x_3 \end{array} \right| . \quad (11.1)$$

В правой части формулы (11.1) перед вертикальной чертой наклонным шрифтом указаны номера строк (конъюнкции).

$$K'_2 = \left(x'_2x'_6\right)' = \left| \begin{array}{l} x_2 \\ x_6 \end{array} \right| = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_2 \\ x'_2x_6 \end{array} \right| .$$

$$K'_1K'_2 = \begin{array}{c} 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 \\ 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1x_2 \\ x_1x'_2x_6 \\ x'_1x_2x_3 \\ x'_1x'_2x_3x_6 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} . \quad (11.2)$$

В формуле (11.2) перед первой (левой) вертикальной чертой указаны номера перемножаемых строк матрицы K'_1 и K'_2. После второй (правой) вертикальной черты указаны результирующие номера строк перемножений конъюнкций $K'_1\,K'_2$.

Аналогичные обозначения приведены и для последующих действий.

$$K'_3 = \left(x'_1x'_4x'_7x'_8\right)' = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x'_1x_4 \\ x'_1x'_4x_7 \\ x'_1x'_4x'_7x_8 \end{array} \right| .$$

$$K_1' K_2' K_3' = \left(K_1' K_2'\right) K_3' = (11.2)\,K_3' = \begin{array}{c} 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 \\ 4\cdot 2 \\ 4\cdot 3 \\ 4\cdot 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 x_2 \\ x_1 x_2' x_6 \\ x_1' x_2 x_3 x_4 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_7 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_7' x_8 \\ x_1' x_2' x_3 x_4 x_6 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7' x_8 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} . \qquad (11.3)$$

$$K_4' = \left(x_1' x_4' x_7' x_9'\right)' = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_1' x_4 \\ x_1' x_4' x_7 \\ x_1' x_4' x_7' x_9 \end{array} \right| .$$

$$K_1' K_2' K_3' K_4' = (11.3)\,K_4' = \begin{array}{c} 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 \\ 4\cdot 3 \\ 5\cdot 4 \\ 6\cdot 2 \\ 7\cdot 3 \\ 8\cdot 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 x_2 \\ x_1 x_2' x_6 \\ x_1' x_2 x_3 x_4 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_7 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_7' x_8 x_9 \\ x_1' x_2' x_3 x_4 x_6 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7' x_8 x_9 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} . \qquad (11.4)$$

$$K_5' = \left(x_1' x_4' x_5' x_6'\right)' = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_1' x_4 \\ x_1' x_4' x_5 \\ x_1' x_4' x_5' x_6 \end{array} \right| .$$

$$K_1' K_2' K_3' K_4' K_5' = (11.4)\,K_5' = \begin{array}{c} 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 \\ 3\cdot 2 \\ 4\cdot 3 \\ 4\cdot 4 \\ 5\cdot 3 \\ 5\cdot 4 \\ 6\cdot 2 \\ 7\cdot 3 \\ 7\cdot 4 \\ 8\cdot 3 \\ 8\cdot 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 x_2 \\ x_1 x_2' x_6 \\ x_1' x_2 x_3 x_4 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_5 x_7 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_5' x_6 x_7 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_5 x_7' x_8 x_9 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_5' x_6 x_7' x_8 x_9 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_5 x_6 x_7 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_5' x_6 x_7 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_5 x_6 x_7' x_8 x_9 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_5' x_6 x_7' x_8 x_9 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} . \qquad (11.5)$$

$$K_6' = \left(x_2' x_3' x_4' x_5'\right)' = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x_2 \\ x_2' x_3 \\ x_2' x_3' x_4 \\ x_2' x_3' x_4' x_5 \end{array} \right| .$$

$$K_1' K_2' K_3' K_4' K_5' K_6' = (11.5)\,K_6' = \begin{array}{r|l|l}
1\cdot 1 & x_1 x_2' & 1 \\
2\cdot 2 & x_1' x_2' x_3' x_6 & 2 \\
2\cdot 3 & x_1 x_2' x_3' x_4' x_6 & 3 \\
2\cdot 4 & x_1' x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 & 4 \\
3\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' & 5 \\
4\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' x_5' x_7 & 6 \\
5\cdot 1 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5 x_6' x_7 & 7 \\
6\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' x_5' x_7 x_8' x_9 & 8 \\
7\cdot 1 & x_1' x_2' x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 & 9 \\
8\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 & 10 \\
9\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5' x_6 x_7 & 11 \\
10\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5 x_6 x_7' & 12 \\
11\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5' x_6 x_7' x_8 x_9 & 13 \\
12\cdot 2 & x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 & 14
\end{array} . \qquad (11.6)$$

$$K_7' = \left(x_2' x_5' x_7' x_8'\right)' = \begin{array}{r|l|}
1 & x_2' \\
2 & x_2' x_5' \\
3 & x_2' x_5' x_7' \\
4 & x_2 x_5 x_7 x_8
\end{array} .$$

$$K_1' K_2' K_3' K_4' K_5' K_6' K_7' = (11.6)\,K_7' = \begin{array}{r|l|l}
1\cdot 1 & x_1 x_2' & 1 \\
2\cdot 2 & x_1 x_2' x_3 x_4' x_5 & 2 \\
2\cdot 3 & x_1 x_2' x_3 x_5' x_6 x_7' & 3 \\
2\cdot 4 & x_1 x_2' x_3' x_5 x_6 x_7 x_8 & 4 \\
3\cdot 2 & x_1 x_2' x_3' x_4 x_5' x_6 & 5 \\
3\cdot 3 & x_1 x_2' x_3' x_4 x_5' x_6 x_7' & 6 \\
3\cdot 4 & x_1 x_2' x_3' x_4' x_5 x_6 x_7 x_8 & 7 \\
4\cdot 2 & x_1' x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 & 8 \\
5\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' & 9 \\
6\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' x_5' x_7 & 10 \\
7\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' x_5 x_6' x_7 & 11 \\
8\cdot 1 & x_1' x_2 x_3 x_4' x_5' x_7 x_8' x_9 & 12 \\
9\cdot 1 & x_1' x_2' x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 & 13 \\
10\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4 x_5' x_6 & 14 \\
10\cdot 3 & x_1' x_2' x_3 x_4 x_5' x_6 x_7' & 15 \\
10\cdot 4 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5 x_6 x_7 x_8 & 16 \\
11\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5' x_6 x_7 & 17 \\
12\cdot 3 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5 x_6 x_7' & 18 \\
13\cdot 2 & x_1' x_2' x_3 x_4' x_5' x_6 x_7' x_8 x_9 & 19 \\
14\cdot 4 & x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 & 20
\end{array} . \qquad (11.7)$$

Логически умножая затем утвердительные конъюнкции K_i на соответствующие произведения отрицаний элементарных конъюнкций согласно формуле (10), получим:

$$
\overline{F} = \left| \begin{array}{l} x'_1 x'_3 \\ x_1 x'_2 x_6 \\ x'_1 x'_2 x_3 x'_6 \\ x'_1 x_2 x_3 x'_4 x'_7 x'_8 \\ x'_1 x'_2 x_3 x'_4 x_6 x'_7 x'_8 \\ x'_1 x_2 x_3 x'_4 x'_7 x_8 x'_9 \\ x'_1 x'_2 x_3 x'_4 x_6 x'_7 x_8 x'_9 \\ x'_1 x_2 x_3 x'_4 x'_5 x'_6 x_7 \\ x'_1 x_2 x_3 x'_4 x'_5 x'_6 x'_7 x_8 x_9 \\ x_1 x'_2 x'_3 x'_4 x'_5 x_6 \\ x_1 x'_2 x_3 x'_4 x_6 x'_7 x'_8 \\ x_1 x'_2 x'_3 x_4 x'_5 x_6 x'_7 x'_8 \\ x'_1 x'_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 x'_7 x'_8 \\ x_1 x'_2 x_3 x'_5 x_6 x'_7 x_8 x'_9 \\ x_1 x'_2 x'_3 x_4 x'_5 x_6 x'_7 x_8 x'_9 \\ x'_1 x'_2 x_3 x_4 x'_5 x_6 x'_7 x_8 x'_9 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} . \qquad (11.8)
$$

Запись (11.8) является ортогональной дизъюнктивной нормальной формой (ОДНФ), позволяющей переход (ФППЗ). Тогда

$$
\begin{aligned}
P\{\overline{F}=1\} = {} & Q_1Q_3 + R_1Q_2Q_6 + Q_1Q_2R_3Q_6 + Q_1R_2R_3Q_4Q_7Q_8 + Q_1Q_2R_3Q_4R_6Q_7Q_8 + \\
& + Q_1R_2R_3Q_4Q_7R_8Q_9 + Q_1Q_2R_3Q_4R_6Q_7R_8Q_9 + Q_1R_2R_3Q_4Q_5Q_6R_7 + \\
& + Q_1R_2R_3Q_4Q_5Q_6Q_7R_8R_9 + R_1Q_2Q_3Q_4Q_5R_6 + R_1Q_2R_3Q_5R_6Q_7Q_8 + \\
& + R_1Q_2Q_3R_4Q_5R_6Q_7Q_8 + Q_1Q_2R_3R_4Q_5R_6Q_7Q_8 + R_1Q_2R_3Q_5R_6Q_7Q_8Q_9 + \\
& + R_1Q_2Q_3R_4Q_5R_6Q_7R_8Q_9 + Q_1Q_2R_3R_4Q_5R_6Q_7R_8Q_9
\end{aligned} . \qquad (12)
$$

При условии $Q_i=R_i=0.5$ имеем

$$
\begin{aligned}
P\{\overline{F}=1\} & = 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4 + 2\cdot 0.5^6 + 4\cdot 0.5^7 + 4\cdot 0.5^8 + 3\cdot 0.5^9 = \\
& = 0.25 + 0.125 + 0.0625 + 0.03125 + 0.03125 + 0.015625 + 0.005859375 = . \\
& = 0.521484375
\end{aligned}
$$

$$
P\{F=1\} = 1 - P\left\{\overline{F}=1\right\} = 1 - 0.521484375 = 0.478515625 . \qquad (13)
$$

Громоздкость операций (11.1) ÷ (11.7), сознательно продемонстрированная выше, не должна пугать читателя.

При умножении утвердительных конъюнкций на соответствующие произведения отрицаний элементарных конъюнкций количество арифметических операций значительно сократятся, если выполнить следующие упрощения:

а) приравнять нулю те члены ДНФ K_j ($j \le i - 1$), которые ортогональны члену K_i;

б) приравнять нулю те элементарные конъюнкции отрицаний K'_j ($j \le i - 1$), которые ортогональны члену K_i.

Проиллюстрируем сокращение этих операций на нескольких примерах.

В случае умножении произведения отрицаний конъюнкций $K'_1K'_2$ (11.2) на утвердительную конъюнкцию $K_3= x'_1\, x'_4\, x'_7\, x'_8$ к нулю приравниваются те члены (11.2), которые ортогональны K_3, то есть два первых члена:

$$
K'_1 K'_2 K_3 = \left| \begin{array}{l} x_1 x_2 \\ x_1 x'_2 x_6 \\ x'_1 x_2 x_3 \\ x'_1 x'_2 x_3 x_6 \end{array} \right| x'_1 x'_4 x'_7 x'_8 = \left| \begin{array}{l} x'_1 x_2 x_3 \\ x'_1 x'_2 x_3 x_6 \end{array} \right| .
$$

В случае умножении произведения отрицаний конъюнкций K'_1 K'_2 K'_3 (11.3) на утвердительную конъюнкцию $K_4= x'_1\, x'_4\, x'_7\, x'_9$ к нулю приравниваются те члены (11.3), номера строк которых равны 1, 2, 3, 4, 6, 7 (так как в них находятся логические переменные x_1, x_4 и x_7, ортогональные логическим переменным x'_1 ,x'_4 и x'_7), а члены с номерами строк 5 и 8 остаются:

$$K_1' K_2' K_3' K_4 = \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2' x_6 \\ x_1' x_2 x_3 x_4 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_7 \\ x_1' x_2 x_3 x_4' x_7' x_8 \\ x_1' x_2' x_3 x_4 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7' x_8 \end{vmatrix} x_1' x_4' x_7' x_9' = \begin{vmatrix} x_1' x_2 x_3 x_4' x_7' x_8 \\ x_1' x_2' x_3 x_4' x_6 x_7' x_8 \end{vmatrix}.$$

В случае умножении произведения отрицаний конъюнкций $K'_1\ K'_2\ K'_3\ K'_4\ K'_5$ (11.5) на утвердительную конъюнкцию $K_6 = x'_2\ x'_3\ x'_4\ x'_5$ к нулю приравниваются одиннадцать членов (11.5) из 12, кроме второго члена $x_1\ x'_2\ x_6$.

Решение данной задачи с помощью программного комплекса АРБИТР в виде схемы функциональной целостности (СФЦ) показано на рис.2.

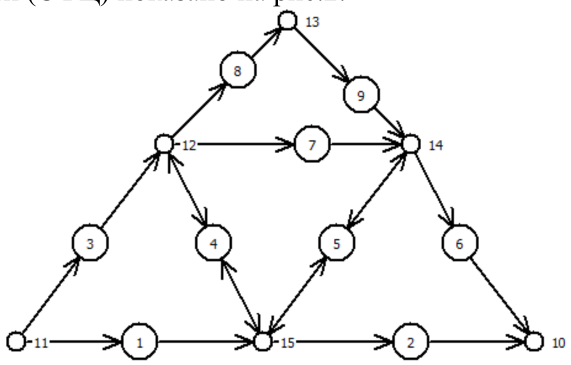

Рисунок 2 – Схема функциональной целостности

Логический критерий функционирования (ЛКФ) реализован на фиктивной вершине *y10*.

Логическая функция работоспособного состояния (ФРС) в отчете моделирования ПК АРБИТР содержит 10 конъюнкций и совпадает с (1):

№ кон.	ФРС
1	X1 X2
2	X2 X3 X4
3	X1 X5 X6
4	X3 X6 X7
5	X2 X3 X5 X7
6	X3 X6 X8 X9
7	X1 X4 X6 X7
8	X3 X4 X5 X6
9	X1 X4 X6 X8 X9
10	X2 X3 X5 X8 X9

Вероятность реализации критерия $Yc = y10$ при тех же исходных данных $R_i = Q_i = 0.5$ составила

$$P\{F = 1\} = P_c = 0.478515625, \qquad (14)$$

что подтверждает правильность ВФ (8) в связи с полным совпадением (14) и (9).

Вероятностная функция в отчете программного комплекса АРБИТР имеет вид (15).

Вероятностная функция (15), внешне совершенно не похожая на ВФ (8), содержит 17 одночленов, из которых 10 членов с (+) и 7 с (–). Наличие отрицательных членов в (15) свидетельствует об использовании метода «включений-выключений», то есть комбинаторной формы при переходе от ФАЛ к ВФ.

Для сравнения, если раскрыть все скобки выражения (12), то вероятностный многочлен будет содержать 25 членов.

Pc = Q1 Q2 P3 P4 P5 P6 Q7
+ P3 P6 Q7 P8 P9
+ Q1 P2 P3 P4
+ P1 Q2 P5 P6
+ P3 P6 P7
+ P1 P2
+ Q1 P2 P3 Q4 P5 Q6 Q7 P8 P9
+ Q1 P2 P3 Q4 P5 Q6 P7
+ P1 Q2 Q3 P4 Q5 P6 Q7 P8 P9 (15)
+ P1 Q2 Q3 P4 Q5 P6 P7
- P1 P2 P3 P6 P7
- P1 Q2 P3 P5 P6 P7
- Q1 P2 P3 P4 P6 P7
- Q1 P2 P3 P4 P6 Q7 P8 P9
- P1 Q2 P3 P5 P6 Q7 P8 P9
- P1 P2 P3 P6 Q7 P8 P9
- Q1 Q2 P3 P4 P5 P6 Q7 P8 P9.

При решении этой задачи через МСО классическим методом ортогонализации непосредственное перемножение отрицаний конъюнкций K'_1 K'_2 K'_3 K'_4 K'_5 K'_6 K'_7 представляется делом громоздким, трудоемким и требующим больших вычислительных ресурсов при программной реализации.

Поэтому рассмотрим другие технологии ортогонализации, получившие в настоящее время в англоязычной литературе сокращение *SDP*-алгоритмы (Sum of Disjoint Products – сумма несовместных произведений, аналог ОДНФ).

SDP-алгоритмы можно разделить на две большие группы – алгоритмы ортогонализации *SVI* по одной логической переменной (*SVI* – Single variable inversion) и алгоритмы ортогонализации *MVI* по многим логическим переменным (*MVI* – multiple-variable inversion).

Первой работой, посвященной алгоритмам ортогонализации по одной логической переменной, является работа1973 года итальянских ученых L.Fratta, U.Montanari [5].

Суть предложенного алгоритма состоит в поэтапном умножении конъюнкций, используя на каждом этапе операции поглощения и сокращения.

Для примера рассмотрим некоторые этапы решения задачи, записанной в виде матрицы (10). L.Fratta, U.Montanari практически использовали алгоритм П.Порецкого, только все вычисления выполнялись итерационным способом.

Первая итерация записывается в виде:

$$\bar{F}_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \left| \begin{array}{l} K_1 \\ K_1' K_2 \\ K_1' K_3 \\ K_1' K_4 \\ K_1' K_5 \\ K_1' K_6 \\ K_1' K_7 \\ K_1' K_8 \end{array} \right| . \qquad (16\text{-}1)$$

Вторая итерация записывается в виде:

$$\bar{F}_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \left| \begin{array}{l} K_1 \\ K_1' K_2 \\ K_1' K_2' K_3 \\ K_1' K_2' K_4 \\ K_1' K_2' K_5 \\ K_1' K_2' K_6 \\ K_1' K_2' K_7 \\ K_1' K_2' K_8 \end{array} \right| . \qquad (16\text{-}2)$$

Последующие итерации приведут к записи, аналогичной правой части формулы (10).

Компьютерная реализация вычислений второй итерации осуществляется в другой эквивалентной форме, которая учитывает результаты вычислений первой итерации и может быть записана в виде:

$$\bar{F}_1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \left| \begin{array}{l} K_1 \\ K_1'K_2 \\ \overline{K_1'K_2'}K_1'K_3 \\ \overline{K_1'K_2'}K_1'K_4 \\ \overline{K_1'K_2'}K_1'K_5 \\ \overline{K_1'K_2'}K_1'K_6 \\ \overline{K_1'K_2'}K_1'K_7 \\ \overline{K_1'K_2'}K_1'K_8 \end{array} \right| . \qquad (16\text{-}3)$$

Для доказательства эквивалентности (16-2) и (16-3) рассмотрим преобразования первых четырех строчек (16-3).

$$K_1 + K_1'K_2 + \overline{K_1'K_2}K_1'K_3 + \overline{K_1'K_2}K_1'K_4 = K_1 + K_1'K_2 + \left(K_1 + K_2'\right)K_1'K_3 + \\ + \left(K_1 + K_2'\right)K_1'K_4 = K_1 + K_1'K_2 + K_1'K_2'K_3 + K_1'K_2'K_4 .$$

Таким образом, запись первых четырех строк (16-3) соответствует первым четырем строкам (16-2).

Главная особенность данного алгоритма (Алгоритм А в авторской редакции) состоит в возможности применения на всех этапах операций поглощения и сокращения, так как уже на втором этапе осуществляется умножение на утвердительные конъюнкции.

Другой особенностью Алгоритма А является возможность проведения приближенных расчетов для задач большой размерности. Это достигается тем, что алгоритм А может быть остановлен на некотором этапе вычислений (Алгоритм В) для получения приближенного решения. При этом сумма всех слагаемых вероятностной функции, полученных замещением логических переменных их вероятностями истинности, даст верхнюю оценку показателя надежности, а сумма только тех слагаемых вероятностной функции, которые получены из ортогональных термов логической функции, даст значение нижней оценки показателя надежности.

В качестве примера рассмотрим алгоритм оценки нижних и верхних границ показателя надежности на основе двух итераций при ортогонализации логической функции (10).

Для вычислений граничных оценок по результатам *первой* итерации (16-1) в качестве нижней границы возьмем вероятность истинности первых двух строк выражения (16-1), то есть

$$Q_{1H}\left\{K_1 \vee K_1'K_2 = 1\right\} = Q_1Q_3 + \left(R_1 + Q_1R_3\right)Q_2Q_6 .$$

При условии Q_i=R_i=0.5 имеем $Q_{1H}\left\{K_1 \vee K_1'K_2 = 1\right\} = 0.4375$.

Для вычисления верхней границы показателя надежности необходимо найти вероятность истинности всех слагаемых выражения (16-1), то есть

$$Q_{1B}\left\{K_1 \vee K_1'K_2 \vee K_1'K_3 \vee \ldots \vee K_1'K_8 = 1\right\} = Q_1Q_3 + \left(R_1 + Q_1P_3\right)Q_2Q_6 + Q_2Q_4Q_7Q_8P_3 + \\ + Q_2Q_4Q_7Q_9P_3 + \ldots$$

При условии Q_i=R_i=0.5 имеем

$$Q_{1B}\left\{K_1 \vee K_1'K_2 \vee K_1'K_3 \vee \ldots \vee K_1'K_8 = 1\right\} = 0.65265 .$$

Для вычислений граничных оценок по результатам *второй* итерации (16-2) в качестве нижней границы возьмем вероятность истинности первых трех строк выражения (16-2), то есть

$$Q_{2H}\left\{K_1 \vee K_1'K_2 \vee K_1'K_2'K_3 = 1\right\} = Q_1Q_3 + \left(R_1 + Q_1P_3\right)Q_2Q_6 + Q_1Q_4Q_7Q_8P_3\left(Q_2 + P_2Q_6\right) .$$

При условии Q_i=R_i=0.5 имеем

$$Q_{2H}\left\{K_1 \vee K_1'K_2 \vee K_1'K_2'K_3 = 1\right\} = 0.4609375 .$$

Вычисление верхней границы оценки показателя по результатам *второй* итерации (16-2) производится по формуле

$$Q_{2B}\left\{K_1 \vee K_1^{'}K_2 \vee K_1^{'}K_2^{'}K_3 \vee ... \vee K_1^{'}K_2^{'}K_8 = 1\right\}.$$

При условии Q_i=R_i=0.5 имеем

$$Q_{2B}\left\{K_1 \vee K_1^{'}K_2 \vee K_1^{'}K_2^{'}K_3 \vee ... \vee K_1^{'}K_2^{'}K_8 = 1\right\} = 0.5625.$$

Результаты оценки нижних и верхних границ вероятности отказа (11) приведены в табл.1:

Таблица 1 – Верхняя и нижняя границы оценки вероятности отказа системы

№ итерации	1	2	3	4	5	6	7
Верхняя граница	0.6563	0.5625	0.5449	0.5371	0.5371	0.5293	0.521484375
Нижняя граница	0.4375	0.4609	0.4727	0.4824	0.4980	0.5137	0.521484375

Заметим, что на седьмой итерации значения верхней и нижней границы оценки показателя надежности совпадают и равны значению, полученному с использованием вероятностного многочлена (12).

График значений верхней и нижней границы оценки вероятности отказа системы, соответствующий данным табл.1, приведен на рис.3.

Применение приближенных расчетов может быть оправдано при проектировании больших систем, когда важно подтвердить выполнение заданных показателей надежности, а не вычислять точное значение.

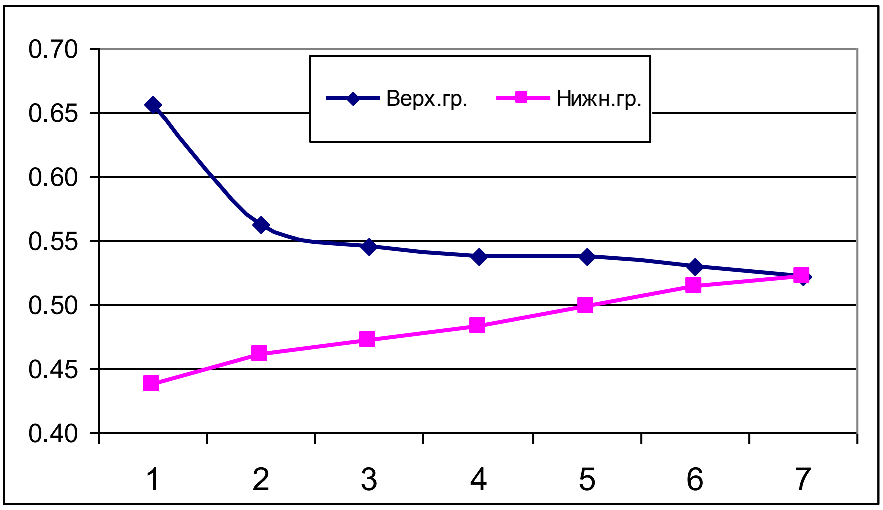

Рисунок 3 – Верхняя и нижняя границы оценки вероятности отказа системы

Дальнейшим развитием алгоритма [5] является работа 1979 года J.A.Abraham [6]. Алгоритм, разработанный J.A.Abraham вместо операции взятие отрицания конъюнкции и затем перемножения использует операцию сравнения (алгоритм и получил название «COMPARE»).

Суть алгоритма, который по структуре подобен Алгоритму А, состоит в том, что для получения результата, например $К'_1$ $К_2$, анализируется (сравнивается), каких логических переменных конъюнкции $К_1$ нет в конъюнкции $К_2$. Если в $К_2$ нет одной переменной, например, *a*, то конъюнкция $К_2$ умножается на комплементированную переменную $\bar{a}$.

Если в $К_2$ нет двух логических переменных, например *a* и *b*, то конъюнкция $К_2$ умножается на выражение ($\bar{a}+a\bar{b}$). И так далее, согласно правилу вычисления отрицания конъюнкции [4]:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n} = \bar{a}_1 + a_1\bar{a}_2 + a_1 a_3 \bar{a}_3 + \cdots a_{n-1}\bar{a}_n$$

В качестве примера рассмотрим работу алгоритма «COMPARE» для преобразования выражения (16-1). В качестве ведущей конъюнкции для наглядности здесь рассматривается конъюнкция $K_1= x'_1\ x'_3$. С ведущей конъюнкцией будут сравниваться все остальные конъюнкции. Результаты сравнения приведены в табл.2.

Таблица 2 – Применение алгоритма «COMPARE» к конъюнкции $К_1 = x'_1\, x'_3$

Сравнение	Ряд перем.	№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$К_2 = x'_2\, x'_6$	$x'_1\, x'_3$	2-1	0	1	-	-	-	1	-	-	-
		2-2	1	1	0			1	-		
$К_3 = x'_1\, x'_4\, x'_7\, x'_8$	x'_3	3	1	-	0	1	-	-	1	1	-
$К_4 = x'_1\, x'_4\, x'_7\, x'_9$	x'_3	4	1	-	0	1	-	-	1	-	1
$К_5 = x'_1\, x'_4\, x'_5\, x'_6$	x'_3	5	1	-	0	1	1	1	-	-	-
$К_6 = x'_2\, x'_3\, x'_4\, x'_5$	x'_1	5	0	1	1	1	1	-	-	-	-
$К_7 = x'_2\, x'_5\, x'_7\, x'_8$	$x'_1\, x'_3$	7-1	0	1	-	-	1	-	1	1	-
		7-2	1	1	0	-	1	-	1	1	-
$К_8 = x'_2\, x'_5\, x'_7\, x'_9$	$x'_1\, x'_3$	8-1	0	1	-	-	1	-	1	-	1
		8-2	1	1	0	-	1	-	1	-	1

В таблице 1 в столбце «Сравнение» представлены те конъюнкции, которые сравниваются с ведущей конъюнкцией $К_1 = x'_1\, x'_3$.

В столбце « Ряд перем.» приведены те логические переменные, которые отсутствуют в сравниваемых конъюнкциях.

В столбце «№№» вписаны **новые** номера строк, которые присваиваются после преобразования. Если число логических переменных, по которым осуществляется инверсия более одного, то строка получает двойной номер.

В столбцах «1,2,..,9» символ «1» означает наличие логической переменной, символ «0» - наличие инверсной логической переменной, а прочерк – отсутствие переменной в конъюнкции.

Далее процедуры алгоритма повторяются относительной новой ведущей конъюнкции №2-1 ($К_{2\text{-}1} = x_1 x'_2\, x'_6$).

Результаты сравнения представления в табл.3.

$К_{2\text{-}2} = x'_1 x_3 x'_2\, x'_6$ *Орт.*

Таблица 3 – Применение алгоритма «COMPARE» к конъюнкции $К_{2\text{-}1} = x_1 x'_2\, x'_6$

Сравнение	Ряд перем.	№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$К_{2\text{-}2} = x'_1 x_3 x'_2\, x'_6$	*Орт.*	2-2	1		0			1	1		
$К_3 = x'_1\, x_3 x'_4\, x'_7\, x'_8$	*Орт.*	3	1	-	0	1	-	-	1	1	-
$К_4 = x'_1\, x_3\, x'_4\, x'_7\, x'_9$	*Орт.*	4	1	-	0	1	-	-	1	-	1
$К_5 = x'_1\, x_3 x'_4\, x'_5\, x'_6$	*Орт.*	5	1	-	0	1	1	1	-	-	-
$К_6 = x_1 x'_2\, x'_3\, x'_4\, x'_5$	x_6	6	0	1	1	1	1	0	-	-	-
$К_{7\text{-}1} = x_1\, x'_2\, x'_5\, x'_7\, x'_8$	x_6	7-1	0	1	-	-	1	0	1	1	-
$К_{7\text{-}2} = x'_1\, x'_2\, x_3\, x'_5\, x'_7\, x'_8$	*Орт.*	7-2	1	1	0	-	1	-	1	1	-
$К_{8\text{-}1} = x_1\, x'_2\, x'_5\, x'_7\, x'_9$	x_6	8-1	0	1	-	-	1	0	1	-	1
$К_{8\text{-}2} = x'_1\, x'_2\, x_3\, x'_5\, x'_7\, x'_9$	*Орт.*	8-2	1	1	0	-	1	-	1	-	1

В столбце «Ряд перем.» бозначение «Орт.» указывает на ортогональность сравниваемых конъюнкций, поэтому эти термы остаются неизменными.

В алгоритме «COMPARE», так же как и в алгоритме А, на всех этапах вычислений применяется операция поглощения и сокращения.

Автор алгоритма «COMPARE» утверждает, что при решении задачи о надежности сети ARPANET время вычислений составило 6 секунд по сравнению с более чем 100 секундами для алгоритма А. Следует заметить, что в результате применения алгоритма А к расчету надежности сети ARPANET получена ОДНФ, состоящая из 34 термов, а при использовании алгоритма «COMPARE» ОДНФ состоит из 71 терма. Многие исследователи данной проблемы отмечают, что размер ОДНФ существенно зависит от порядка следования конъюнкций в ходе выполнения алгоритмов.

Кроме того, если следовать принципу построения алгоритма «COMPARE» и перед умножением конъюнкций (preprocessing) осуществлять операции упрощения и сокращения (поглощения) числа логических переменных перед действием умножения, то можно существенно снизить время работы компьютерной программы или ручных вычислений и, возможно, получить ОДНФ с меньшим числом термов.

Для задачи «Пять треугольников» ОДНФ для оценки вероятности безотказной работы системы записывается в виде 14 термов:

1. $X_1\ X_2$
2. $\overline{X}_1\ X_2\ X_3\ X_4$
3. $\overline{X}_2\ X_1\ X_5\ X_6$
4. $\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ X_3 X_6\ X_7$
5. $\overline{X}_1\ X_2 X_3 \overline{X}_4\ X_6\ X_7$
6. $X_1 \overline{X}_2\ X_3 \overline{X}_5\ X_6\ X_7$
7. $X_1 \overline{X}_2\ \overline{X}_3\ X_4\ \overline{X}_5\ X_6\ X_7$
8. $\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ X_3\ X_4\ X_5\ X_6\ \overline{X}_7$ (17)
9. $\overline{X}_1\ X_2 X_3 \overline{X}_4\ X_5 \overline{X}_6\ X_7$
10. $\overline{X}_1\ X_3 \overline{X}_4\ X_6\ \overline{X}_7\ X_8\ X_9$
11. $\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ X_3 X_4 \overline{X}_5\ X_6\ \overline{X}_7\ X_8\ X_9$
12. $X_1 \overline{X}_2\ X_3 \overline{X}_5\ X_6\ \overline{X}_7\ X_8\ X_9$
13. $\overline{X}_1\ X_2 X_3 \overline{X}_4\ X_5 \overline{X}_6\ \overline{X}_7\ X_8\ X_9$
14. $X_1 \overline{X}_2\ \overline{X}_3\ X_4\ \overline{X}_5\ X_6\ \overline{X}_7\ X_8\ X_9$.

Однопараметрическмй полином, соответствующий ОДНФ (17), при $R_1=...=R_9=R$ имеет следующий вид:

$$P\{F=1\} = R^2 + 3R^3 + 2R^4 - 11R^5 - R^6 + 17R^7 - 13R^8 + 3R^9 . \qquad (18)$$

Заметим, что ОДНФ задачи [2], записанной через 10 КПУФ (1), содержит 14 термов (17), а та же задача, записанная через 8 МСО (10), содержит 16 термов (11.8).

Первой работой, посвященной разработке метода ортогонализации по многим логическим переменным (*MVI),* считается работа Klaus D. Heidtmann (1989), в которой описан алгоритм KDH-88. Основная идея алгоритма, показанная автором на простом примере [10], состоит в следующем.

Пусть необходимо сделать ортогональными конъюнкции $x_1x_2x_3x_4$ и $x_5x_6x_7x_8$. Тогда справедлива запись

$$x_1x_2x_3x_4 \vee \overline{x_1x_2x_3x_4}x_5x_6x_7x_8$$

Данная логическая функция является ортогональной и, так как во второй конъюнкции нет ни одного литерала из первой конъюнкции, то справедливо соответствующее вероятностное выражение

$$p_1p_2p_3p_4 \vee (1 - p_1p_2p_3p_4)\, p_5p_6p_7p_8 .$$

Из современного решения задачи «Пять треугольников» разными логико-вероятностными методами можно сделать следующие выводы.

1. Точного решения этой задачи в 1969 году возможно и не требовалось. Проблема структурно-сложных систем возникла несколько позже, о чем сообщается в работах [1,4].

Созданный в те годы логико-вероятностный метод анализа надежности ССС стал успешно применяться в военизированных областях науки и техники (ВМФ, ракетно-космическая техника и др.). Незнание истории ЛВМ и ее авторов привело к тому, что большинство специалистов, занимающихся надежностью, так и не овладели логико-вероятностным исчислением (ЛВИ), а некоторые доктора наук признали ЛВМ «…наукой, ведущей в никуда» [7]. Так доктор технических (а не философских) наук Владимир Николаевич Соколюк философствуя между физикой и метафизикой и критикуя ЛВМ, пишет [7, стр.103]: «…Таким образом, в рамках одной логико-вероятностной теории объединяются отрицающие друг друга начала: полная определенность и неопределенность. Не говорит ли это о противоречии, лежащем в основе логико-вероятностной теории?»

2. Приходится с грустью сожалеть и о пропуске внимания к выдающейся книге Дениса Артемьевича Владимирова [8], который уже в 1969 году показал, что «…Булева алгебра – это алгебраическая система, в которой в зависимости от обстоятельств может быть интерпретирована либо как система событий, либо как система высказываний (допускаются и иные толкования). Аксиомы булевой алгебры выражают то общее, что роднит «события» и «высказывания».

3. Среди пяти методов вычисления вероятностной функции, изложенных в книге [4, глава 5], здесь мы подчеркнуто выделяем схемно-логический метод. Разложение ФАЛ (1) по трем аргументам x_1, x_2, x_3 равносильно представлению Задачи в форме 8-ми несовместных гипотез, вероятности истинности которых можно складывать.

4. Решение задачи с помощью комплекса АРБИТР естественно самое быстрое (секунды, а не часы и дни). Однако наличие отрицательных членов в вероятностной функции (15) свидетельствует об использовании метода «включений-исключений», т.е. комбинаторной формулы при переходе от ФАЛ к ВФ.

Ортогонализация ДНФ (1) в ОДНФ (17) нам представляется более удачным решением задачи, однако пока не показана трудоемкость самой ортогонализации на ЭВМ.

5. Попытки усовершенствования процедуры ортогонализации при использовании ЭВМ [5,6] продемонстрированы на задаче «Пять треугольников», что существенно облегчает понимание смысла этих алгоритмов (А и В), имея перед глазами подробное теоретическое решение для ручного анализа.

6. Работа над этой статьей подтолкнула нас к поиску знаменитого выступления П.С.Порецкого 1886 года на 60-м заседании секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете с докладом: «Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики» [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябинин И.А. Логико-вероятностный анализ проблем надежности и безопасность (ЛВА НЖБ ССС). Palmarium Academic Publishing, Saarbrucken, Deutschland, 2012, 272 с.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности./ Пер. с англ. под ред. Б.В.Гнеденко.- М.Сов. радио, 1969, 488 с.
3. Шеннон К. Символический анализ релейных и переключательных схем. – В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике./Пер. с англ. под ред. Р.Л.Добрушина и О.Б.Лупанова. – М.:ИЛ, 1963.
4. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем (2-е издание). СПБ: Изд-во СПбГУ, 2007. 276 с.
5. L.Fratta, U.G.Montanari,"A Boolean Algebra Method for Computing the Terminal Reliability in a Communication Network," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-20, 1973 May, PP. 203–211.
6. J.A.Abraham, " An Improved Algorithm for Network Reliability," *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-28, 1979 Apr, PP. 58–61.
7. Соколюк В.Н. Парадоксы современного бытия (об адекватности логики, мышления мировоззренческим принципам)// «Философский век. Альманах 7. Между физикой и метафизикой: Наука и философия (К 275-летию Академии наук). СПб, 1998, С.100–107.
8. Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М., 1969, 319 с.
9. Порецкий П.С. решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики.- Собрание протоколов 60-го заседания секции физико-математических наук общества естествоиспытателей при Казанском университете, Казань, 1886, с.1-34. Труды Казанской секции физ.мат.наук. Серия 1., 1887, т.5, С.83–116.
10. K.D.Heidtmann," Smaller Sum of Disjoint Products by Subproduct Inversion," *IEEE Trans. Reliability*, Vol. R-38, 1989 August, PP. 305–311.